# الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

عالج أحد الموضوعين على الخيار

## الموضوع الأول

**التمرين الأول:** (03.5ن)




لتكن $(E)$ مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حيث $11x+3y=65$

1/عين الثنائية $(x_0;y_0)$ من المجموعة $(E)$ و التي تحقق $2x_0^2-3y_0=11$

2/حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $11x+3y=65$

3/عين الثنائيات $(x;y)$ من $(E)$ حيث $x>-5$ و $y>-5$

**التمرين الثاني:** (05ن)

المستوي المرب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقاط $D;C;B;A$ لواحقها على الترتيب

$$z_A=3i \ ; \ z_B=2 \ ; \ z_C=2-3i \ ; \ z_D=-9+3i$$

1/أكتب العبارة المربة للتشابه مباشر $S$ الذي يحول النقطة $C$ إلى النقطة $A$ ويحول النقطة $B$ إلى النقطة $D$

2/ أ)أثبت أن $\Omega(0;-3)$ مركز التشابه $S$ و عين نسبته $k$ وزاويته

ب) ما طبيعة المثلث $\Omega AC$

3/ أ)عين لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $(A;1);(\Omega;2);(C;-2)$

ب)عين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $|z-z_A|^2+2|(z-z_\Omega)^2|=25+2|z-z_C|^2$

**التمرين الثالث:** (04.5ن)

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;1;2)$ ;$B(-1;0;-2)$ ;$C(-1;0;-6)$

1/ليكن $(p)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $MA^2-MB^2=1$

بين أن $(p)$ هو مستوي يطلب إعطاء معادلته

2/لتكن $(S)$ مجموعة النقط من الفضاء حيث $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

بين أن $(S)$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $R$

3/ $G$ نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عين إحداثيات النقطة $G$ ثم تأكد أنها تنتمي إلى المجموعة $(S)$

ب) أكتب معادلة للمستوي $(q)$ الذي يمس سطح الكرة $(S)$ في النقطة $G$

**التمرين الرابع** (07ن)

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{2x}+4e^{x}-6$

1/ أدرس تغيرات الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها

2/حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$ ثم إستنتج ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة $f$ ذات المتغير الحقيقي $x$ ال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}+4(x-1)e^{x}-3x^2$

$(C)$ منحناها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f'(x)=xg(x)$

2/أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3/أدرس تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها

4/ إستنتج وجود نقطة إنعطاف $I$ للمنحنى $(C)$ يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C)$ عند $I$

5/برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

6/أنشئ المماس $(\Delta)$ والمنحنى $(C)$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول**:(04ن)

1/حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$

2/ ليكن العدد المركب $z_1=3-3i$

أ) أكتب العدد $z_1$ على الشكل الأسي

ب) نعتبر العدد المركب $z_3$ حيث : $z_1z_3=6(\cos\frac{®}{12}+i\sin\frac{®}{12})$

ت) استنتج قيمتي العددين $\cos\frac{®}{12}$ و $\sin\frac{®}{12}$

3/في المستوي المركبالمنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقاط $A;B;C$ لواحقها على الترتيب :

$$z_C=6\ ;\ z_B=3-3i\ ;\ z_A=3+3i$$

أ) عين زاوية الدوران الذي مركزه $O$ ويحول النقطة $A$ إلى النقطة $B$

ب) ماطبيعة الرباعي $OACB$

**التمرين الثاني** :(05ن)

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1:-1);B(-1;2;4);C(0;-2;3);D(1;1;-2)$
والمستوي $(P)$ ذي المعادلة $x-2y+z+1=0$

بين صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير في كل حالة

1/النقط $A;B;C$ تعين مستوي

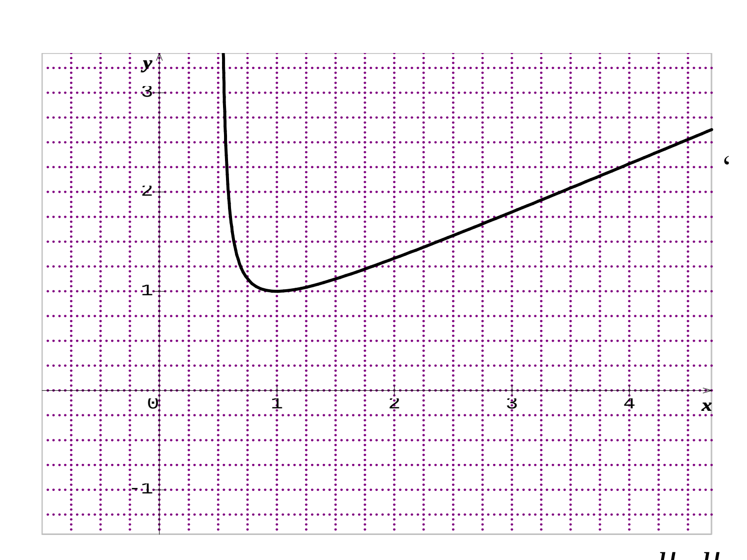
2/ $x+8y-z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABD)$

3/التمثيل الوسيطي للمستقيم $(AC)$ هو: $\begin{cases}x=2t\\ y=2+3t\\ z=3-4t\end{cases}$

4/سطح الكرة التي مركزها $D$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{2}$ تمس المستوي $(P)$

5/النقطة $E(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(P)$

**التمرين الثالث** :(04ن)




$g$ دالة معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $g(x)=\frac{x^2}{2x-1}$ ،

$(C)$ تمثيلها البياني مرسوم في الشكل المقابل

1/ بين أنه من أجل $x>1$ فإن $g(x)>1$

2/ نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0=4$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم أنشئ المستقيم الذي معادلته $y=x$ ثم علم على محور الفواصل الحدود $u_3,u_2,u_1,u_0$

ب) ضع تخمينا حول تغيرات وتقارب المتتالية $(u_n)$

3/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n>1$

4/ بين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما

5/ استنتج أن $(u_n)$ متقاربة وحدد نهايتها

**التمرين الرابع** (07ن)

I) $g$ دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1/ عين $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2/ أدرس إتجاه الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها

3/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.8<\alpha<1.9$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) $f$ دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ ، $(C)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتائج بيانيا

2/ أ) بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$

ب) استنتج إتجاه تغير $f$ وأنشئ جدول تغيراتها

ت) بين أن $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$

3/ أنشئ المنحنى $(C)$

## التصحيح :(الموضوع الأول)

**التمرين الأول:** $11x+3y=65$

/1 $\begin{cases}11x_0+3y_0=65\\ 2x_0^{\,2}-3y_0=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x_0^{\,2}+11x_0-76=0\\ 3y_0=2x_0^{\,2}-11\end{cases}$

$$\Delta=(11)^2-4(2)(-76)=729 \qquad \sqrt{\Delta}=27$$

$$x_0=\frac{-11-27}{4}=\frac{38}{4}\notin\mathbb{Z}$$

$$x_0=\frac{-11+27}{4}=4$$

$$3y_0=2(4)^2-11\Rightarrow y_0=\frac{21}{3}=7$$

$$(x_0;y_0)=(4;7)$$

/2 $\begin{cases}11x+3y=65\\ 11(4)+3(7)=65\end{cases}\Rightarrow 11(x-4)=-3(y-7)$

$$3 \big/ 11(x-4)\xrightarrow{GAUS} 3\big/ x-4\Rightarrow x=3k+4$$

$$11\big/ -3(y-7)\xrightarrow{GAUS} 11\big/ -y+7$$
$$\Rightarrow y=-11k+7$$

$$s=\{(x;y)/\,x=3k+4; y=-11k+7 \;\; k\in\mathbb{Z}\}$$

/3

$$\begin{cases}3k+4>-5\\ -11k+7>-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3k>-9\\ -11k>-12\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}k>-3\\ k<\dfrac{12}{11}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}k\in\{-2,-1,0,1\}\\ \Rightarrow (x;y)\in\{(-2;29);(1;18);(4;7);(7;-4)\}\end{array}}$$

**التمرين الثاني :**

$$z_A=3i\;\;;z_B=2\;;z_C=2-3i\;\;;z_D=-9+3i$$

/1 بالطرح $\begin{cases}z_A=az_C+b\\ z_D=az_B+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3i=a(2-3i)+b\\ -9+3i=a(2)+b\end{cases}$

$$\begin{cases}9=-3ia\\ -9+3i=2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{3i}=-3i\\ b=-9-3i\end{cases}$$

$$\boxed{z'=3iz-9-3i}$$

2/أ)

$$3i(z_\Omega)-9-3i=3i(-3i)-9-3i$$
$$=9-9-3i=z_\Omega$$

إذن $\Omega(0;-3)$ مركز التشابه

ونسبته $k=|3i|=3$ وزاويته $- =\arg(3i)=\frac{®}{2}$

ب) المثلث $\Omega AC$ قائم في $\Omega$

3/ أ)

$$z_G=\frac{z_A+2z_\Omega-2z_C}{1+2-2}=\frac{3i+2(-3i)-2(2-3i)}{1}$$
$$=3i-4\Rightarrow G(-4;3)$$

ب)

$$|z-z_A|^2+2|(z-z_\Omega)^2|-2|z-z_C|^2=25$$
$$MA^2+2M\Omega^2-2MC^2=25$$
$$(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{G\Omega})^2$$
$$-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=25$$
$$MG^2+GA^2+2G\Omega^2-2GC^2$$
$$+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Omega}-2\overrightarrow{GC})=25$$

$$GA^2=16;G\Omega^2=52;GC^2=72$$

$$MG^2+16+104-144=25$$
$$MG^2=49$$

دائرة مركزها $G$ ونصف قطرها $r=7$

**التمرين الثالث** :

/1

$$MA^2 - MB^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 -$$
$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 1$$
$$-4x - 2y - 8z = 0$$

إذن $(p)$ مستوي معادلته $-4x - 2y - 8z = 0$

/2 $R = \sqrt{\dfrac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 - 4(-6)}{4}} = 3$

$\Omega(1;1;1)$

أ/3)

$$G\left(\frac{1+1-1}{1};\frac{1-0-2}{1};\frac{2+2-6}{1}\right);G(1;-1;-2)$$

$G$ تحقق معادلة $(S)$

ب)الشعاع $\overrightarrow{\Omega G}$ شعاع ناظمي للمستوي $(q)$

$\overrightarrow{\Omega G}(0;-2;-3)$

$$0x - y - 3z + d = 0$$
$$0(1) - (-1) - 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

المعادلة هي $-y - 3z - 7 = 0$

**التمرين الرابع**: I)

$$g(x) = 2e^{2x} + 4e^{x} - 6$$

/1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -6\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$g'(x) = 4e^{2x} + 4e^{x} = 4e^{x}(e^{x}+1) > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} + 4e^{x} - 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2y^2 + 4y - 6 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$y = \frac{-4-8}{4} = -3\ ;\ y = \frac{-4+8}{4} = 1$$

$e^{x} = -3$ لاتقبل حل $\quad e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II) /1

$$f'(x) = 1e^{2x} + 2e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + 4e^{x} + 4e^{x}(x-1) - 6x$$
$$= xg(x)$$

/2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | ↘ $-\infty$ |

/4المشتقة انعدمت عند0 ولم تغير إشارتها النقطة $I(0;-4.5)$ نقطة إنعطاف

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = -4.5$$

/5الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]0.5;1[$

$$f(0.5)f(1) = -4.4 \times 0.6 < 0$$

حسب م ق م المعادلة تقبل حل وحيد

**الموضوع الثاني**

**التمرين الأول:**

/1

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$

$$\Delta = 36 - 72 = -36 = 36i^2$$

$$z_1 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i \ ; z_2 = 3+3i$$

/2أ)

$$|z_1| = 3\sqrt{2}$$

$$\cos -_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \sin -_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$- = -\frac{®}{4} \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{®}{4}}$$

ب)

$$r_1 r_3 = 6 \Rightarrow r_3 . 3\sqrt{2} = 6 \Rightarrow r_3 = \sqrt{2}$$

$$- -\frac{®}{4} = \frac{®}{12} \Rightarrow - = \frac{®}{3}$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{®}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{®}{3} + i\sin\frac{®}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ت)

$$z_1 z_3 = (3-3i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i + \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2} + i\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{®}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \ ; \sin\frac{®}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

/4 أ)

$$\frac{z_B - Z_O}{z_A - z_O} = a \Rightarrow a = \frac{3-3i}{3+3i}$$

$$a = \frac{(3-3i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = -i$$

ومنه زاوية الدوران هي $-\frac{®}{2}$

ب) $z_{\overline{OA}} = 3+3i \ ; z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 3+3i$

إذن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ الرباعي $OACB$ مربع

**التمرين الثاني** :

/1صحيح لأن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \quad \frac{-3}{-2} \neq \frac{1}{-3}$

/2 صحيح لأن :

$2 + 8(1) - (-1) - 11 = 0$ النقطة $A$ تحقق المعادلة

$-1 + 8(2) - (4) - 11 = 0$ النقطة $B$ تحقق المعادلة

$1 + 8(1) - (-2) - 11 = 0$ النقطة $C$ تحقق المعادلة

/3خطأ لأن النقطة $A$ لاتحق الجملة

/4خطأ لأن:

$$d(D;(p)) = \frac{|1-2(1)-2+1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

/5 خطأ لأن :

$$-\frac{4}{3} - 2(\frac{2}{3}) + \frac{5}{3} + 1 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow E \in (P)$$

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{-11}{3}\end{pmatrix}$ غير مرتبط خطيا مع $\vec{n}(1;-2,1)$

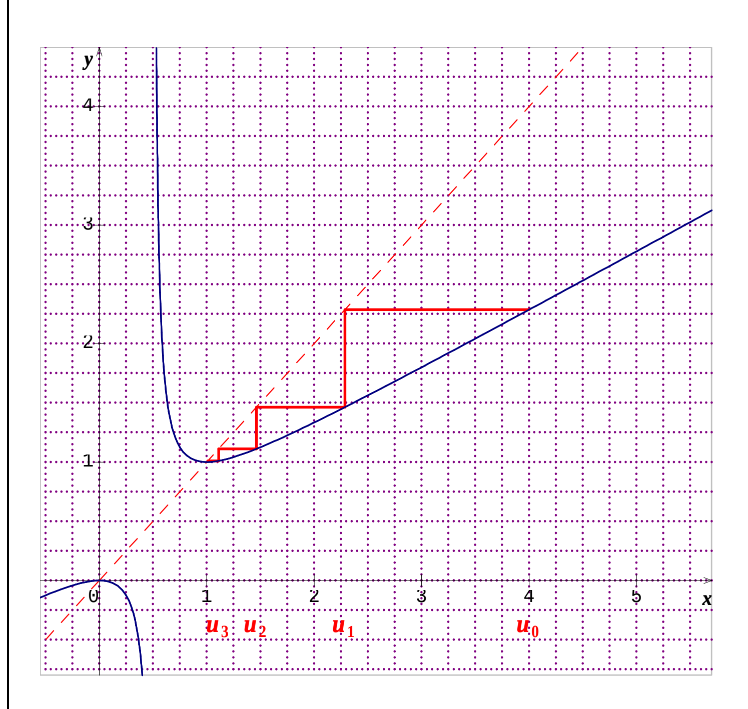
**التمرين الثالث** :

/1لدينا $g(1) = 1$ والدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ إذن من أجل $x > 1$ فإن $g(x) > 1$

/2

ب) المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ومقاربة

(أ




3/من أجل $n=0$ لدينا $u_0=4>1$ خ ص

نفرض صحتها من أجل $n$ أي $u_n>1$

نثبت صحتها من أجل $n+1$

$$u_n>1 \Rightarrow f(u_n)>1 \Rightarrow u_{n+1}>1$$

/4

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$$

إشارته من إشارة $1-u_n$

$u_n>1 \Rightarrow 1-u_n<0$ المتتالية متناقصة تماما

5/المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

نفرض $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=l$

$$\lim_{x\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{x\to+\infty} u_n \Rightarrow \frac{l^2}{2l-1}=l$$

بعد حل المعادلة نجد أن : $l=0$ مرفوض و $l=1$

<u>التمرين الرابع</u> :

I) $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1/ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2/ من أجل $x>0$:

$$g'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-4x^2-5x-1}{(2x+1)^2}$$

$$\Delta=9 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{4} ;x_2=-1$$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ $-\infty$ |

3/ $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.8 ; 1.9]$

$$g(1.8)g(1.9)=0.02\times -0.5<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد

$1.8<\sim<1.9$

| $x$ | $0$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

II) $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

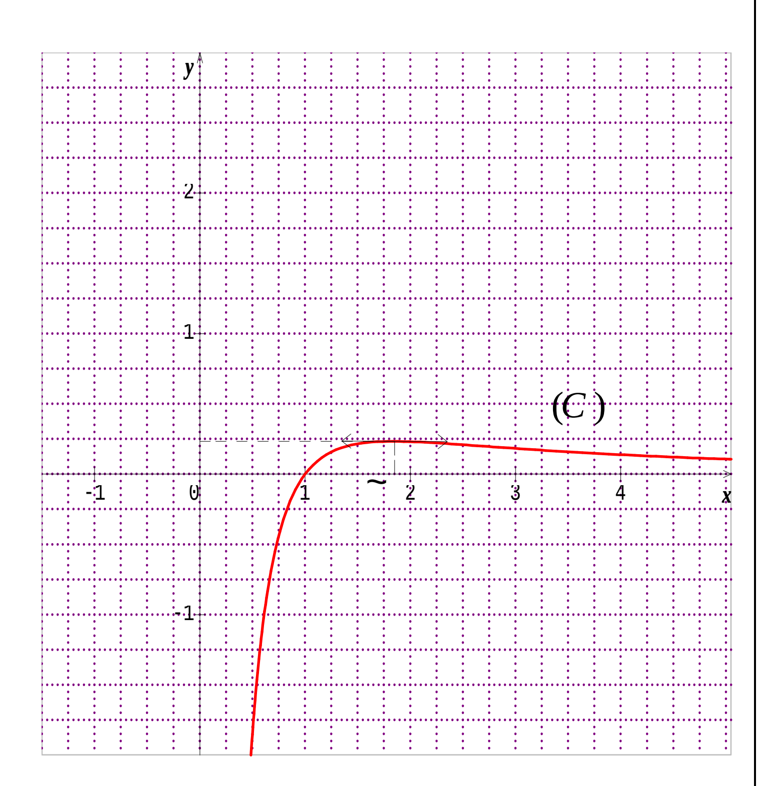
/1

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x^2(1+\frac{1}{x})}=0$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$




2/ أ)

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x^2+x)-(2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)-(2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(2x+1)\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | $0$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $f(a)$ | ↘ $0$ |

ت)

$$f(\sim)=\frac{2\ln\sim}{\sim^2+\sim}$$

$$g(\sim)=0\Rightarrow\ln\sim=\frac{\sim+1}{2\sim+1}$$

$$f(\sim)=\frac{2\frac{\sim+1}{2\sim+1}}{\sim^2+\sim}=\frac{2(\sim+1)}{\sim(\sim+1)(2\sim+1)}$$

$$=\frac{2}{\sim(2\sim+1)}$$

$$1.8<\sim<1.9$$

$$4.6<2\sim+1<4.8$$

$$8.28<\sim(2\sim+1)<9.12$$

$$0.10<\frac{1}{\sim(2\sim+1)}<0.12$$

$$0.20<\frac{2}{\sim(2\sim+1)}<0.24$$

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**ثانوية صلاح الدين الأيوبي - بوقادير**

**الشعبة : علوم تجريبية** **دورة : مــاي 2014**

**امتحان البكالوريا التجريبي**

**اختبار في مادة : الرياضيات** **المدة : 03 ساعات ونصف**

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

**التمرين الأول** : ( **05 نقاط** )

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية: $z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ ,

$A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما $z_A = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ و $z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ على الترتيب و $r$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$ .

أ) أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي ثم بين أن النقطتان $A$ و $B$ تنتميان الى نفس الدائرة $(\Gamma)$ ذات المركز $O$ و نصف القطر 3

ب) بين أن : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

3. لتكن $A'$ و $B'$ صورتي $A$ و $B$ على الترتيب بالدوران $r$ .

أ - أكتب على الشكل الأسي. $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لاحقتي النقطتين $A'$ ، $B'$ على الترتيب .

ب- أحسب $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ ، ثم برهن أن $B$ و $A'$ متناظرتين بالنسبة الى النقطة $O$ و أستنتج طبيعة المثلث $ABA'$

**التمرين الثاني** : ( **04 نقاط** )

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$ و $(C)$ تمثيلها البياني ( أنظر الوثيقة المرفقة ).

1. أ) أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x) = x$ .نرمز الى الحل بالرمز $\alpha$

جـ) برهن أنه إذا كان : $x \in [0;\alpha]$ فإن : $f(x) \in [0;\alpha]$ وبالمثل إذا كان : $x \in [\alpha;+\infty[$ فإن : $f(x) \in [\alpha;+\infty[$

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$

أ) باستعمال المنحنى $(C)$ والمستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = x$ مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ على محور الفواصل دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها .

جـ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها .

3. ماذا يمكن القول عن اتجاه تغير و تقارب المتتالية $(u_n)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي الموجب أو المعدوم $\alpha$ ؟

**التمرين الثالث** : ( 04 **نقاط** )

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ . نعتبر النقط $A(1;-2;4)$ ، $B(-2;-6;5)$ و $C(-4;0;-3)$

1) أ– بين أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

ب – برهن أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ ،شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ .

جـ - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

2) أ– أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $O$ و يعامد المستوي $(ABC)$

ب – عين إحداثيات النقطة $O'$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستوي $(ABC)$

3) نرمز بـ $H$ الى المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستقيم $(BC)$ . $t$ عدد حقيقي حيث : $\overrightarrow{BH}=t\,\overrightarrow{BC}$

أ– برهن أن : $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$ .

ب– استنتج العدد الحقيقي $t$ و إحداثيات النقطة $H$ .

**التمرين الرابع** : ( 07 **نقاط** )

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x+\ln\left|e^x-1\right|$

نرمز بـ $(C_f)$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ– أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب – أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة .

2) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$ ، أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3) برهن أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $-\infty$

4) أ) بين أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$ ثم استنتج أن المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ .

ب) حدد نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ .

جـ) تحقق من أن معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\ln(2)$ هي: $y=3x-2\ln(2)$

5) أ) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ و الذي يحقق أن: $0{,}4\prec\alpha\prec0{,}5$ ثم استنتج اشارة $f(x)$ .

ب)برهن أن العدد $\alpha$ يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

6)أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني $(C_f)$.

# الموضوع الثاني

**التمرين الأول** : ( 05 **نقاط** )

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ ,

$A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ على الترتيب .

أ) أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي.

ب) علم النقطتان $A$ و $B$.

ت) برهن أن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

3. نسمي النقطة $C$ ذات اللاحقة $z_C = -8i$ و النقطة $D$ صورتها بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ .

- علم النقطتان $C$ و $D$ .ثم برهن أن لاحقة النقطة $D$ هي $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$ .

4.برهن أن النقطة $D$ هي صورة النقطة $B$ بتحاك $h$ مركزه $O$ يطلب تعيين نسبته .

5. أحسب النسبة $\frac{z_A - z_D}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $OAD$ .

**التمرين الثاني** : ( 05 **نقاط** )

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ . نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$ .

1.بين أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

2. $(\Delta)$ مستقيم يشمل النقطة $D$ و $\vec{u}\left(2;-1;3\right)$ شعاع توجيه له .

أ – برهن أن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

ب- إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

جـ -أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ .

د- عين إحداثيات النقطة $H$ ،نقطة تقاطع المستقيم $\left(\Delta\right)$و المستوي $(ABC)$

3) ليكن المستوي $(P)$ الذي معادلته $x + y + z = 0$ و المستوي $(Q)$ الذي معادلته $x + 4y + 2 = 0$ .

أ– برهن أن المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان .

ب- تحقق أن المستقيم $(D')$ ، مستقيم تقاطع $(P)$ و $(Q)$ تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$ ,$t \in \mathbb{R}$

جـ - هل المستقيم $(D')$ و المستوي $(ABC)$ متقاطعان أم متوازيان ؟

**التمرين الثالث** : ( 04 **نقاط** )

1.لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln(x)$

- أدرس تغيرات الدالة $f$

2. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$ .

أحسب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

3.$(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

أ- أثبت أن $v_n=n-n\ln(n)$ .

ب- باستعمال الدالة $f$ ، أدرس إتجاه تغير $(v_n)$ ثم أستنتج أن $(u_n)$ متناقصة .

جـ - استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0\prec u_n\leq e$

د- استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و عين نهايتها .

**التمرين الرابع** : ( 06 **نقاط** )

I) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=x+1-e^x$

ا). ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها .

ب). استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x)\leq 0$

II) $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$ .

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ . (وحدة الطول $2cm$ )

أ) . احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب). بملاحظة أن : $f(x)=\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)x^2e^{-x}$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=(2x^2-3x-2)e^{-x}$ ، عين إشارة $f'(x)$

د) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) أ) عين معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(x)-(1-2x)=(1-2x)\times g(x)\times e^{-x}$

جـ) استنتج وضعية المنحنى $(C_f)$بالنسبة للمماس $(T)$ .

4) أ) ادرس تقاطع المنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل

ب) ارسم $(C_f)$ و $(T)$ على المجال $[-1;+\infty[$ .

5) $F$ الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $\mathrm{F}(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

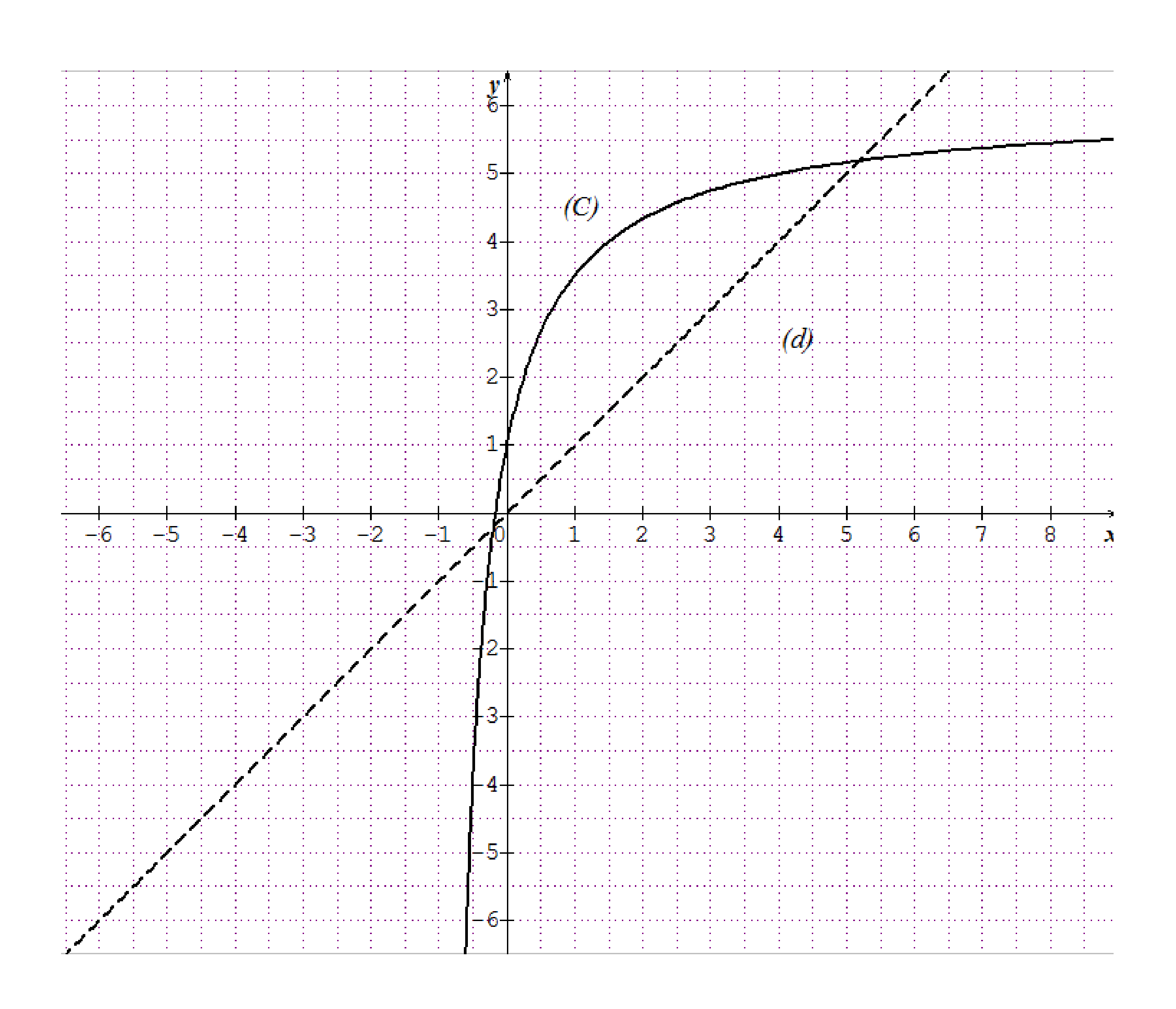
عين الاعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث تكون الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

الإسم و اللقب :...............................................................

# الوثيقة 1

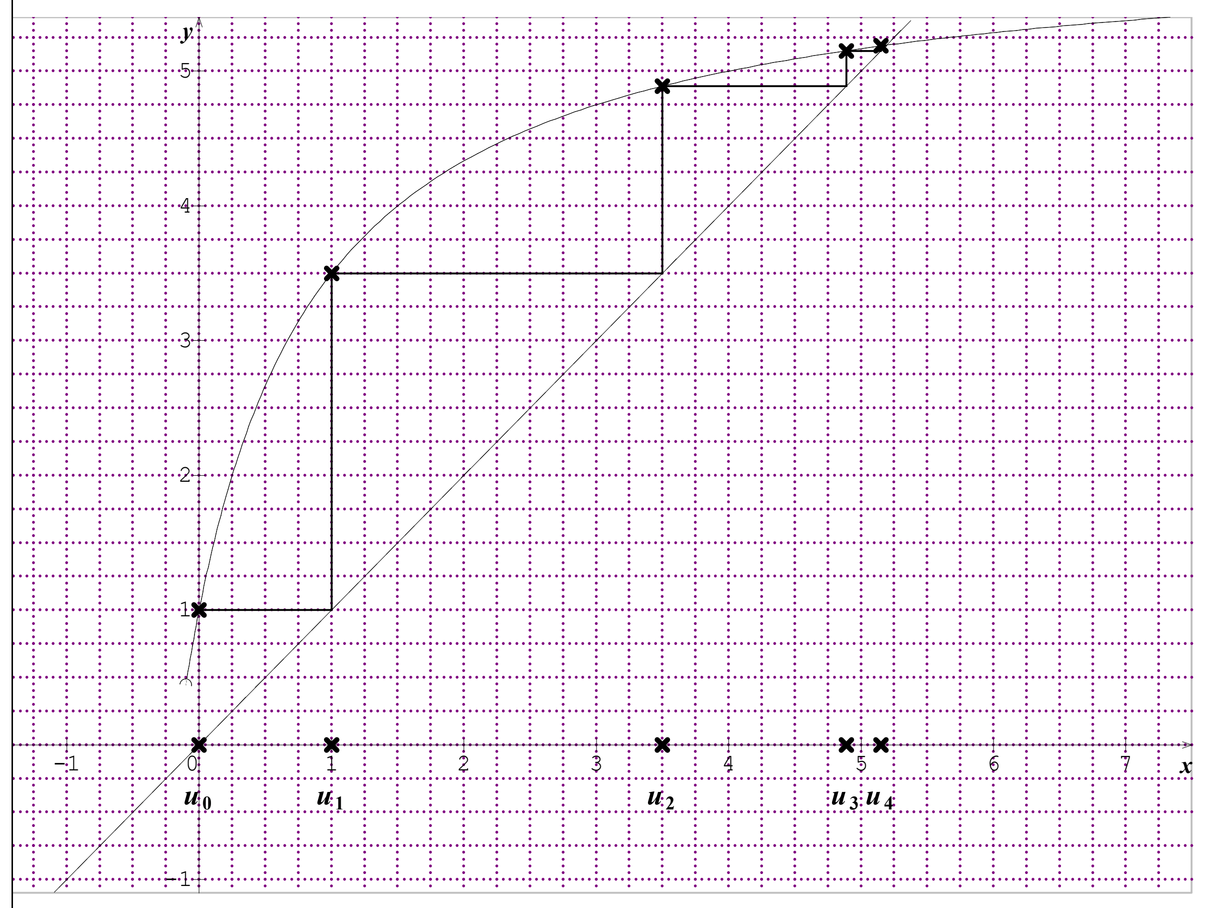
## ( ترجع مع ورقة الإجابة )

**الموضوع الأول - التمرين الثاني**



# تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

| | الإجابة النـــموذجية الموضوع الأول | السلم |
|---|---|---|
| أعداد مركبة و تحويلات نقطية <br><br> المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع | **حل التمرين الاول :** <br> 1) لدينا المعادلة $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$ تكافئ $z^2-3\sqrt{3}\,z+9=0$ <br> $\Delta=-9=9i^2$ وعليه الحلين هما $z'=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ، $z''=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ <br> 2) أ- لدينا : $z_A=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ <br> ولدينا $OA=OB=3$ ومنه $A$ و $B$ تنتميان لنفس الدائرة $(\Gamma)$ مركزها $O$ ونصف قطرها 3 . <br> ب) لدينا $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ ومنه $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ أي $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ <br> 3) أ- لدينا : $z_{A'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_{B'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{-i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$ <br> ب) لدينا : $\frac{z_{A'}}{z_B}=\frac{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}{3e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\pi}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)=\pi+2\pi k$ أي $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)=\pi+2\pi k$ ومن جهة <br> أخرى: $OA'=OB=3$ ومنه النقطتان $B$ و $A'$ متناظرتان بالنسبة إلى النقطة $O$ <br> $[A'B]$ قطر للدائرة $(\Gamma)$ و بما أن $A$ تنتمي الى $(\Gamma)$ فإن المثلث $ABA'$ قائم في $A$ . <br> **حل التمرين الثاني :** <br> 1) أ- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}>0$ <br> ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ . <br> ب) لدينا : $f(x)=x$ معناه $6-\frac{5}{x+1}=x$ ومنه $-x^2+5x+1=0$ معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=29$ <br> وحليها $x_1=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ ( مقبول ) ، $x_2=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$ ( مرفوض ) إذن $\alpha=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ <br> جـ) لدينا : $x\in[0;\alpha]$ معناه $0\le x\le\alpha$ و بما أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن <br> $f(0)\le f(x)\le f(\alpha)$ أي $0\le 1\le f(x)\le\alpha$ أي $f(x)\in[0;\alpha]$ <br> وبالمثل لدينا : $x\in[\alpha;+\infty[$ معناه $x\ge\alpha$ و بما أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن <br> $f(x)\ge f(\alpha)$ أي $f(x)\ge\alpha$ ومنه $f(x)\in[\alpha;+\infty[$ <br> 2) أ- تمثيل الحدود : | |

| | | |
|---|---|---|
| **المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع** | ب) يظهر ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومتقاربة<br>جـ) البرهان بالتراجع : نسمي $P(n)$ الخاصية $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$<br>- من اجل $n=0$ لدينا $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ أي $0 \le 0 \le 1 \le \alpha$ وهي محققة<br>- نفرض صحة $P(n)$ أي $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$<br>لدينا : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ و بما أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن<br>$f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(\alpha)$ أي $0 \le 1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$<br>د) لدينا : من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \le u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$ و هذا يعني أن : $(u_n)$ متزايدة .<br>بماأن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\alpha$ فهي متقاربة نحو العدد $l$ والذي يحقق $f(l) = l$ أي $l = \alpha$<br>إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$<br>3) المناقشة :<br>- إذا كان $u_0 \in [0,\alpha[$ فإن $(u_n)$ متزايدة ومتقاربة نحو $\alpha$<br>- إذا كان $u_0 = \alpha$ فإن $(u_n)$ ثابتة ومتقاربة نحو $\alpha$<br>- إذا كان $u_0 \in [\alpha;+\infty[$ فإن $(u_n)$ متناقصة ومتقاربة نحو $\alpha$<br><br> | |

## حل التمرين الثالث :

1.أ) بيان أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

$\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$ و ومنه الشعاعان غير مرتبطين خطيا و النقط ليست في استقامية

ب ـ البرهان أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-3+4-1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-5-2+7=0$ ومنه $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي $(ABC)$ .

جـ- للمستوي $(ABC)$ معادلة ديكارتية من الشكل : $x-y-z+d=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ نجد : $d=1$ **ومنه معادلة المستوي $(ABC)$ هي :** $x-y-z+1=0$

2.أ - كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ . $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ .

ب- تعيين إحداثيات النقطة $O'$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستوي $(ABC)$

لدينا : $O'(x;y;z)=(\Delta)\cap(ABC)$

بتعويض كلا من $x$ ، $y$ و $z$ في معادلة المستوي نجد : $t+t+t+1=0$ أي : $t=-\frac{1}{3}$

**و منه :** $O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

3.نرمز بـ $H$ الى المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستقيم $(BC)$ . $t$ عدد حقيقي حيث : $\overrightarrow{BH}=t\ \overrightarrow{BC}$

أ- البرهان أن : $t=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$ .

لدينا : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HO}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\vec{0}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=t\times\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}^2=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$

ومنه : $t=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

ب- استنتاج العدد الحقيقي $t$ و إحداثيات النقطة $H$.و لتكن : $H(x_H;y_H;z_H)$

لدينا : $\overrightarrow{BO}(2;6;5)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ ، $t=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}=\frac{2\times(-2)+6\times6+(-5)\times(-8)}{\left(\sqrt{4+36+64}\right)^2}=\frac{72}{104}=\frac{9}{13}$

لدينا : $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ ، $\overrightarrow{BH}(x_H+2;y_H+6;z_H-5)$ و بما أن : $\overrightarrow{BH}=t\ \overrightarrow{BC}=\frac{9}{13}\overrightarrow{BC}$ نستنتج :

$\begin{cases} x_H+2=\frac{9}{13}\times(-2) \\ y_H+6=\frac{9}{13}\times6 \\ z_H=\frac{9}{13}\times(-8) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x_H=-\frac{44}{13} \\ y_H=-\frac{24}{13} \\ z_H=-\frac{7}{13} \end{cases}$ **و عليه تكون إحداثيات النقطة هي :** $H\left(-\frac{44}{13};-\frac{24}{13};-\frac{7}{13}\right)$

الهندسة الفضائية

## حل التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x+\ln\left|e^x-1\right|$

| | | |
|---|---|---|
| | (انظر المحتوى أدناه) | |

1) أ– حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب – حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f\left(x\right)$ و تفسير هندسيا النتيجة .

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f\left(x\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f\left(x\right)=-\infty$ المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2) بيان أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$ ، دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على كل م$\left(C_f\right)$جال من مجالي تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على كلا من المجالين و دالتها المشتقة حيث :

$$f'\left(x\right)=1+\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^x-1+e^x}{e^x-1}=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$$

$f'\left(x\right)=0$ معناه : $2e^x-1=0$ أي : $2e^x=1$ و منه : $x=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$ و إشارتها تعتمد على إشارة البسط و المقام .

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | - | | - | ‖ | + | |
| $2e^x-1$ | - | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | + | | - | ‖ | + | |

جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | | + | 0 | - | ‖ | + | |
| $f\left(x\right)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-\ln 2)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(-\ln 2)=-2\ln 2$

3) البرهان أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-y\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(-(e^x-1)\right)=\ln 1=0$ و منه **المستقيم** $\left(\Delta\right)$ **الذي معادلته** $y=x$ **مقارب مائل للمنحني** $\left(C_f\right)$ **عند** $-\infty$

4) أ) بيان أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$ ثم استنتاج أن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ .

لدينا :

$$f(x)=x+\ln\left|e^x-1\right|=x+\ln\left(e^x-1\right)=x+\ln\left(e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$=x+\ln e^x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=2x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$$

الدوال الأسية و حساب الدوال اللوغاريتمية

و من جهة أخرى : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=\ln 1=0$ و عليه **المنحني** $(C_f)$ **يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته** $y=2x$ **بجوار** $+\infty$ **.**

ب) تحديد نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ .

$f(x)=y$ معناه : $x+\ln\left|e^x-1\right|=x$ أي : $\ln\left|e^x-1\right|=0=\ln 1$ ومنه :

$e^x-1=1$ أي $e^x=2$ و منه : $x=\ln 2$ أو $-\left(e^x-1\right)=1$ أي $e^x=0$ وهي مستحيلة الحل.

$$(\Delta)\cap(C_f)=\left\{A(\ln 2:\ln 2)\right\}$$

جـ) التحقق من أن معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\ln(2)$ هي: $y=3x-2\ln(2)$

لدينا : $y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)=3(x-\ln 2)+\ln 2=3x-2\ln 2$

5) أ) البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ و الذي يحقق أن: $0,4\prec\alpha\prec 0,5$

لدينا $f(0.4)\simeq$ ، $f(0.5)\simeq$ و $f$ دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و بصفة خاصة على المجال $]0.4;0.5[$**.والعدد** $0$ **محصور بين** $f(0.4)$ **و** $f(0.5)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ .

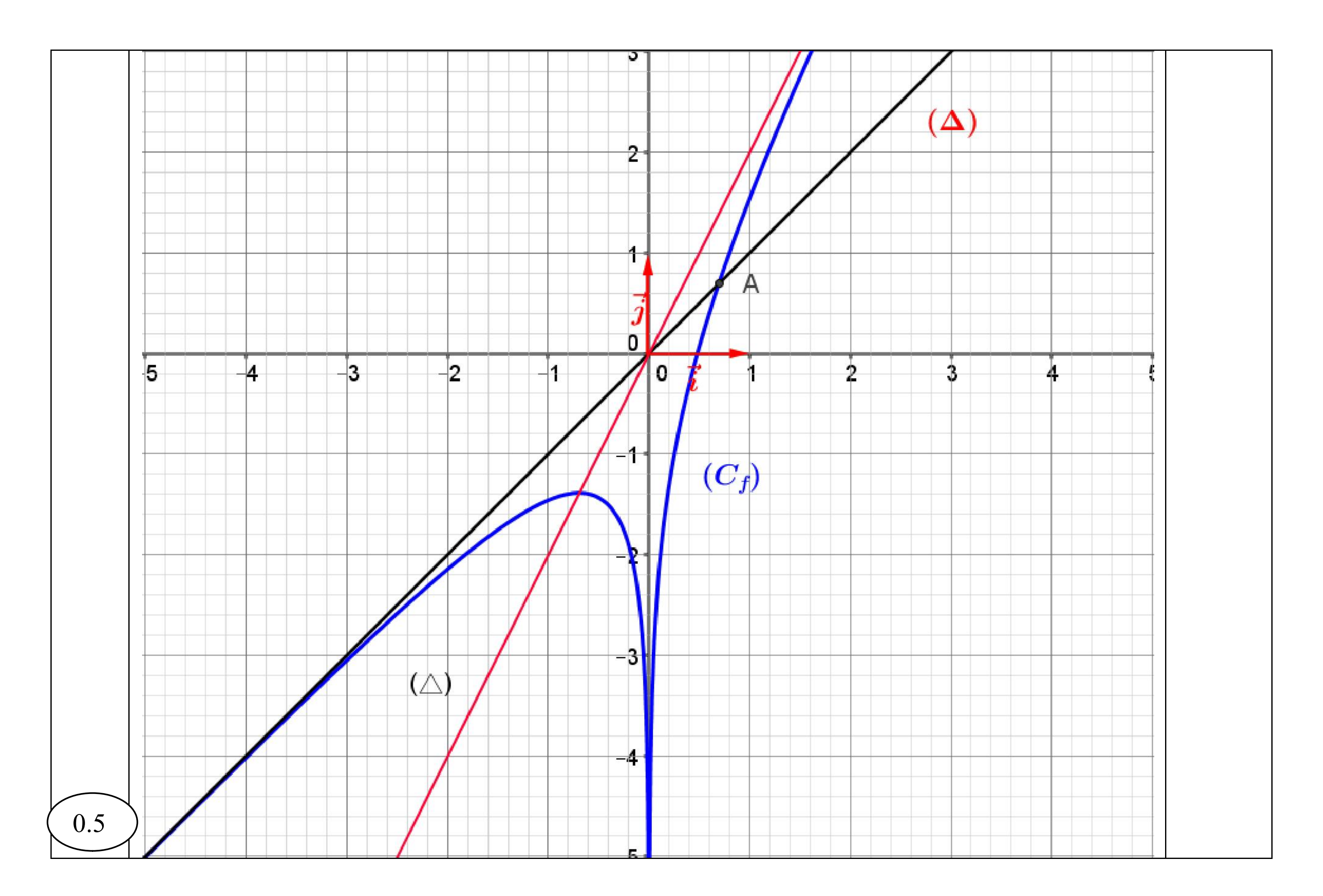
| $x$ | $-\infty$      $0$      $\alpha$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $-$    ‖    $-$    $0$    $+$ |

ب)البرهان أن العدد $\alpha$ يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

لدينا : $f(\alpha)=0$ : معناه : $\alpha+\ln\left(e^{\alpha}-1\right)=0$ أي : $\ln e^{\alpha}+\ln\left(e^{\alpha}-1\right)=\ln 1$ و بالتالي :

$\ln e^{\alpha}\times\left(e^{\alpha}-1\right)=\ln 1$ و هكذا نجد : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

6)رسم المستقيمات المقاربة و المنحني $(C_f)$.



(Δ)
A
(C_f)
(△)
0.5

# تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

| السلم | الإجابة النـــموذجية الموضوع الثاني | |
|---|---|---|

**حل التمرين الأول:**

1.لدينا : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

$\Delta=-16=16i^2$ ، $z_1=\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{2}=2\sqrt{3}-2i$ — 01

، $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{3}+2i$

2.أ) $z_B=2\sqrt{3}+2i=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ — 01

$z_A=2\sqrt{3}-2i=\overline{z_B}==4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب) أنظر الشكل — 0.5

ت) لدينا : $OA=|z_A|=4$ ، $OB=|z_B|=4$

ث) ومن جهة أخرى :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2\sqrt{3}+2i-(2\sqrt{3}-2i)\right|=|4i|=4$

ومنه $OA=OB=AB$ و المثلث $OAB$ متقايس اللأضلاع. — 0.5

3.- تعليم النقطتان $C$ و $D$ أنظر الشكل . — 0.5

- لدينا : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ ومنه : $z_D=$ $z_D=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-8i)=4\sqrt{3}+4i$ — 0.5

4.نلاحظ أن : $z_D=2z_B$ و بعبارة أخرى : $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ و هذا يعني أن النقطة $D$ هي صورة النقطة $B$ بتحاك $h$ مركزه $O$ و نسبته 2 . — 0.5

5.لدينا : $\dfrac{z_A-z_D}{z_A}=\dfrac{2\sqrt{3}-2i-\left(4\sqrt{3}+4i\right)}{2\sqrt{3}-2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}-2i}=-i\sqrt{3}$ ومنه :

$\arg\left(\dfrac{z_A-z_D}{z_A}\right)=\arg\left(-i\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ أي : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ — 0.5

و المثلث $OAD$ قائم في $A$ .

أعداد مركبة و تحويلات نقطية

**حل التمرين الثاني :**

1.بيان أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

$\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-5}{-1}$ ومنه الشعاعان غير مرتبطين خطيا و النقط ليست في استقامية — 01

الهندسة الفضائية

2. أ – البرهان أن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 2\times1-1\times(-1)-1\times3=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times2-1\times(-5)+3\times(-3)=0$ ومنه $\vec{u}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي $(ABC)$ . (0.5)

ب- للمستوي $(ABC)$ معادلة ديكارتية من الشكل : $2x-y+3z+d=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ نجد : $d=1$

**ومنه معادلة المستوي** $(ABC)$ **هي :** $2x-y+3z+1=0$ (0.75)

جـ -كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ . $\begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ . (0.75)

د- تعيين إحداثيات النقطة $H$ ،نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$و المستوي $(ABC)$

بتعويض كلا من $x$ ، $y$ و $z$ في معادلة المستوي نجد : $2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0$ أي : $t=-2$.

**و منه :** $H(7+2\times(-2);-1+2;4+3\times(-2))$ **أي :** $H(3;1;-2)$ (0.5)

3) أ– البرهان أن المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان .

لدينا : $\vec{n}_{(P)}(1;1;1)$ و $\vec{n}_{(Q)}(1;4;0)$ نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا و بالتالي $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان . (0.5)

ب- لدينا : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+4y+2=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x+t+z=0 \\ y=t \\ x+4t+2=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}$ و $(t\in\mathbb{R})$ (بوضع $y=t$ ) (0.5)

جـ - شعاع توجيه المستقيم $(D')$ هو: $\vec{u}(-4;1;3)$ و لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=-4\times2+1\times(-1)+3\times3=0$ و منه المستقيم $(D')$ و المستوي $(ABC)$ متوازيان و بالإضافة الى ذلك النقطة $E(-2;0;-2)$ من $(D')$ من أجل $(t=0)$ لا تحقق معادلة $(ABC)$ إذن هما متوازيان تماما. (0.5)

## حل التمرين الثالث :

- دراسة تغيرات الدالة $f$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=+\infty$ (0.25)

الدالة قابلة للإشتقاق على المجال و لدينا : $f'(x)=1-\left(1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x\right)=-\ln x$ (0.25)

$f'(x)=0$ معناه $-\ln x=0$ أي $x=1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

(0.5)

2. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$ .

حساب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم وضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

$u_1=e\simeq2.71$ ، $u_2=\frac{e^2}{4}\simeq1.85$ ، $u_3=\frac{e^3}{27}\simeq074$ ، $u_4=\frac{e^4}{256}\simeq0.21$ ، $u_5=\frac{e^5}{3125}\simeq0.05$ (0.75)

| | | |
|---|---|---|
| المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع | يظهر أن $(u_n)$ متناقصة و نهايتها تؤول الى 0<br>3.أ- اثبات أن $v_n = n - n\ln(n)$ .<br>لدينا : $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln e^n - \ln n^n = n\ln e - n\ln(n) = n - n\ln(n)$<br>ب- باستعمال الدالة $f$ ،دراسة إتجاه تغير $(v_n)$ ثم استنتاج أن $(u_n)$ متناقصة .<br>من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $v_n = f(n)$ و الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و بالتالي $(v_n)$ متناقصة تماما .<br>بما أن $u_n = e^{v_n}$ و الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن اتجاه تغير $(u_n)$ هو اتجاه تغير $(v_n)$<br>أي : $(u_n)$متناقصة تماما .<br>جـ - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0 \prec u_n \le e$<br>المتتالية $(u_n)$متناقصة تماما و موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $0 \prec u_n \le u_1 = e$ أي أن : $(u_n)$محدودة .<br>د- استنتاج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و تعيين نهايتها .<br>المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(n) = -\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$<br>**حل التمرين الرابع:**<br>**I)** درسة اتجاه تغير الدالة $g$ ثم تشكيل جدول تغيراتها. $g(x) = x + 1 - e^{-x}$<br>$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-e^x\right) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$<br>الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x) = 1 - e^x$ و التي تنعدم من أجل $x = 0$<br>جدول التغيرات : | 0.5<br>0.75<br>0.5<br>0.5<br>01 |

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | 0 | − |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | 0 | ↘ $-\infty$ |

0.5

بما أن الدالة $g$ تقبل قيمة حدية عظمى $g(0) = 0$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x) \le 0$ .

**الدوال الأسية و حساب الدوال الأصلية**

II) $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$ .

0.25

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

0.5

ب). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{e^x}=-2\times 0=0$ ، $y=0$ مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$.

جـ) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$ ، تعيين إشارة $f'(x)$

01

الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=(-4x-1)e^{-x}-e^{-x}\left(-2x^2-x+1\right)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$

$f'(x)=0$ معناه : $2x^2-3x-2=0$ ، $\Delta=25\succ 0$ ، $x'=-\frac{1}{2}$ ، $x''=2$

د) تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$ .

0.5

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-\frac{1}{2})$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | $0$ |

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(2)=-9e^{-2}=-\frac{9}{e^2}$

0.5

3) أ) تعيين معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=-2x+1$

ب) من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$f(x)-(1-2x)=(-2x+1)(x+1)e^{-x}-(1-2x)=(1-2x)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]$$

$$f(x)-(1-2x)=(1-2x)\left(\frac{x+1}{e^x}-1\right)=(1-2x)\left(x+1-e^x\right)e^{-x}$$

$$f(x)-(1-2x)=(-2x+1)g(x)e^{-x}$$

جـ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-2x+1)$

0.5

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | - | |
| $g(x)$ | | - | $0$ | - | | - | |
| $f(x)-(-2x+1)$ | | - | $0$ | - | $0$ | $+$ | |
| الوضعية النسبية | | $(C_f)$تحت $(T)$ | | $(C_f)$ تحت $(T)$ | | $(C_f)$فوق $(T)$ | |

4) أ) دراسة تقاطع المنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل

0.25

$f(x)=0$ معناه $-2x^2-x+1=0$ أي : $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$ ومنه $(C_f)$يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$.

ب) رسم $(C_f)$ و $(T)$ على المجال $[-1;+\infty[$ .

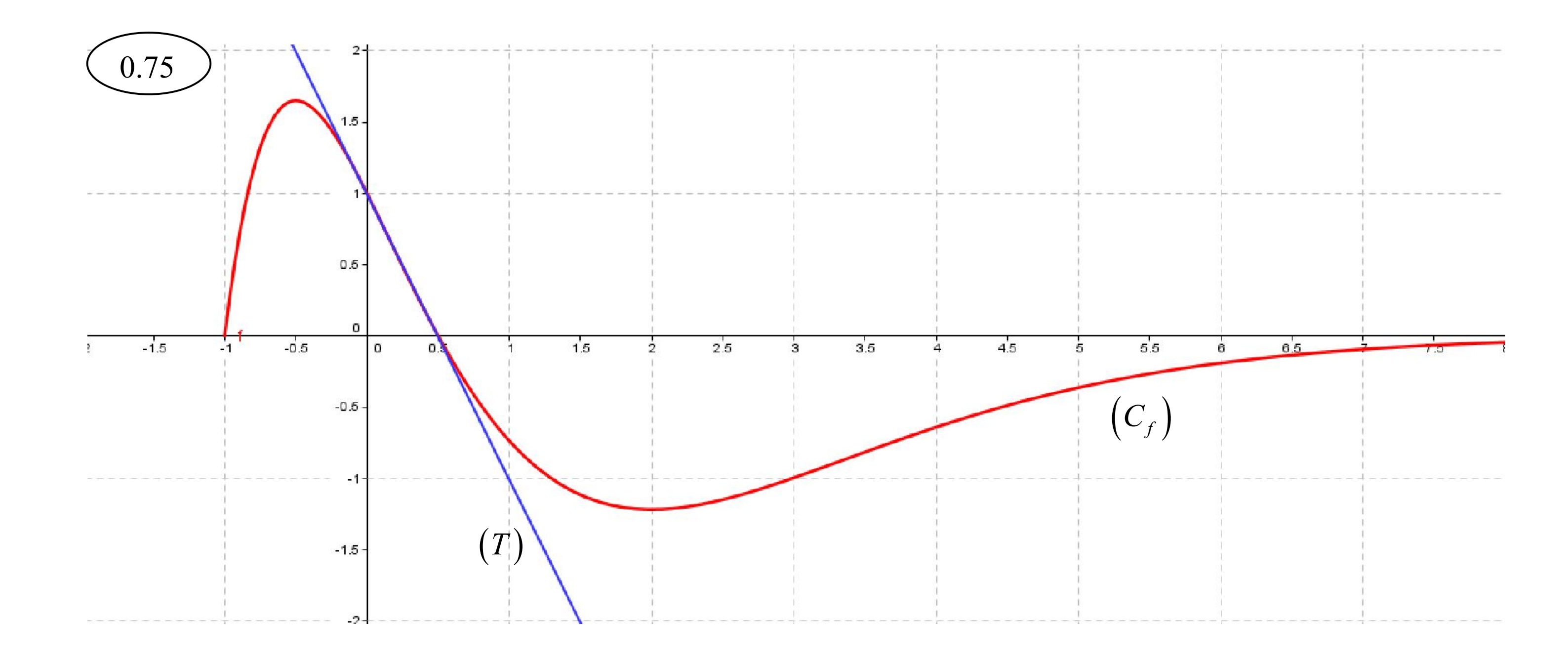
5) $F$ الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\mathrm{F}(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

تعيين الاعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث تكون الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

0.5

لدينا : $\mathrm{F}'(x)=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}\left(ax^2+bx+c\right)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b+c\right)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $a=2$ ، $b=5$ ، $c=4$ إذن : $\mathrm{F}(x)=\left(2x^2+5x+4\right)e^{-x}$


0.75
$(C_f)$
$(T)$


تربية أون لاين

## الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية صلاح الدين الأيوبي

**الشعبة : علوم تجريبية** دورة : **ماي 2013**

امتحان البكالوريا التجريبي

**اختبار في مادة : الرياضيات** المدة : **03ساعات ونصف**

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

**التمرين الأول : ( 05 نقاط )**

المنحني $(C)$ في الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة $f$ معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بـقراءة بيانية شكل جدول تغيرات $f$

2) بين أنه إذا كان $x\in\left[1,\sqrt{3}\right]$ فإن $f(x)\in\left[1,\sqrt{3}\right]$

3) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=1$

و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$

أ) باستعمال المنحنى $(C)$ والمستقيم ذو المعادلة $y=x$

مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها .

جـ ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

د) بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

**التمرين الثاني : ( 04 نقاط )**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . $A$ و $B$ نقطتان من المستوي المركب لواحقهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و النقطة $C$ منتصف القطعة $[OB]$ ذات اللاحقة $z_C$ .

أ) أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي.

ب) علم النقط $A$ ، $B$ و $C$

جـ) برهن أن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

3) لتكن النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $-\frac{®}{2}$ و النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالإنسحاب الذي شعاعه $2\vec{v}$ .

أ) علم النقطتان $D$ و $E$ ب) برهن أن : $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

4) بين أن النقط $A$ ، $C$ و $E$ في إستقامية .

## التمرين الثالث : ( 05 نقاط )

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ . نعتبر النقط $A(-2\,;\,0\,;\,1)$ ، $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ و $C(-2\,;\,2\,;\,2)$

1) أ– أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم الأطوال $AB$ و $AC$ .

ب – أستنتج قيمة مقربة مقدرة بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$ .

جـ – أستنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

2) تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي: $2x-y+2z+2=0$ .

3) ليكن $(P_1)$ و $(P_2)$ المستويين اللذين معادلتيهما $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$ على الترتيب.

- برهن أن $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان وفق المستقيم $(D)$ الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

4) بين أن $(D)$ و $(ABC)$ متقاطعان ثم عين نقطة تقاطعهما.

## التمرين الرابع : ( 07 نقاط )

I – نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^x+x+1$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $~$ على $\mathbb{R}$ و تحقق أن: $-1.28 \prec ~ \prec -1.27$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ .

II – نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$

و $(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ– أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\times g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن : $f(~)=~+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(~)$ ( تدور النتائج الى $10^{-2}$ ).

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ .

5) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

6) أرسم $(\Delta)$،$(T)$ و $(C_f)$.

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول** : ( 05 نقاط )

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$ و أعط الحلول على الشكل الجبري.

2) ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ( وحدة الطول على المحورين $3cm$ ) . $A$ و $B$ نقطتان لاحقتهما على الترتيب : $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=-\sqrt{3}+i$ .

أ) أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل المثلثي .

ب) علم النقط $A$ و $B$ .

جـ) برهن أن المثلث $OAB$ قائم و متساوي الساقين.

د) لتكن النقطة $K$ منتصف القطعة $[AB]$. علم النقطة $K$ وعين لاحقتها $z_K$ .

3) لتكن النقطة $C$ ذات اللاحقة $z_C=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$. برهن أن النقطة $K$ هي منتصف القطعة $[OC]$ ثم علم $C$ .

برهن أن الرباعي $OACB$ مربع.

**التمرين الثاني** : ( 04 نقاط )

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ .

**في كل حالة من الحالات التالية أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل**

1) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=t+2\\y=-2t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\z=3t-1\end{cases}$ يوازي المستوي الذي معادلته الديكارتية: $x+2y+z-3=0$ .

2) $(P)$ ، $(P')$ و $(P")$ ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب :

$x-2y+3z-3=0$ ، $2x+3y-2z-6=0$ و $4x-y+4z-12=0$ لا تشترك في أية نقطة.

3) المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ الممثلا ن وسيطيا : $t\in\mathbb{R}$ $(d_1):\begin{cases}x=-2-3t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$ ، $u\in\mathbb{R}$ $(d_2):\begin{cases}x=7+u\\y=2+2u\\z=-6-u\end{cases}$ متقاطعان

4) نعتبر النقط $A(-1\,;0\,;\,2)$ ، $B(1\,;4\,;\,0)$ و $C(3\,;\,-4\,;\,-2)$. معادلة المستوي $(ABC)$ هي: $x+z-1=0$ .

5) نعتبر النقط $A(-1\,;1\,;3)$ ، $B(2\,;1\,;0)$ و $C(4\,;\,-1\,;\,5)$. يمكن كتابة $C$ كمرجح لنقطتين $A$ و $B$ .

**التمرين الثالث** : ( 04 نقاط )

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$

1) أحسب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$ .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ ، $u_n\geq n-3$

جـ) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$.

3) نعرف المتتالية $(v_n)$ كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أحسب $v_n$ بدلالة $n$

جـ) أستنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع: $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

أحسب بدلالة $n$ المجموع $T_n$ ثم أستنتج المجموع $S_n$ بدلالة $n$ .

**التمرين الرابع** : ( 07 نقاط )

**لتكن** $f$ **الدالة المعرفة على المجال** $]2,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني **في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) **أحسب** $\lim_{x \to 2} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ **من المجال** $]2,+\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

جـ) **أستنتج** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ .

2) **أحسب** $f'(x)$ ثم بين أنه من اجل كل $x$ **من المجال** $]2,+\infty[$ : $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$

**استنتج اتجاه** تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المستقيم $(\Delta)$ الي معادلة له : $y = \frac{1}{2}x - 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ **بجوار** $+\infty$ .

5) بين أن **المعادلة** $f(x) = 0$ **تقبل** حلين ~ **و** حيث : $2.3 \leq \sim \leq 2.4$ **و** $9.2 \leq \quad \leq 9.3$ .

6) **أنشئ** المستقيم $(\Delta)$ **و المنحنى** $(C_f)$

7) **لتكن** $h$ **و** $H$ **الدالتان المعرفتان على المجال** $]2,+\infty[$ كمايلي :

$h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ **و** $H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$ .

أ) بين أن $H$ هي دالة أصلية للدالة $h$ **على المجال** $]2,+\infty[$.

ب) أستنتج دالة أصلية $F$ **للدالة** $f$ **على المجال** $]2,+\infty[$.

# تصحيح امتحان البكالوريا التجريبية

**الإجابة النـــموذجية** — سلم

## الموضوع الثاني

أعداد مركبة و تحويلات نقطية

**حل التمرين الأول:**

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$

$\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$ تكافئ $\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)=0$ أو $\left(z^2-2z+4\right)=0$

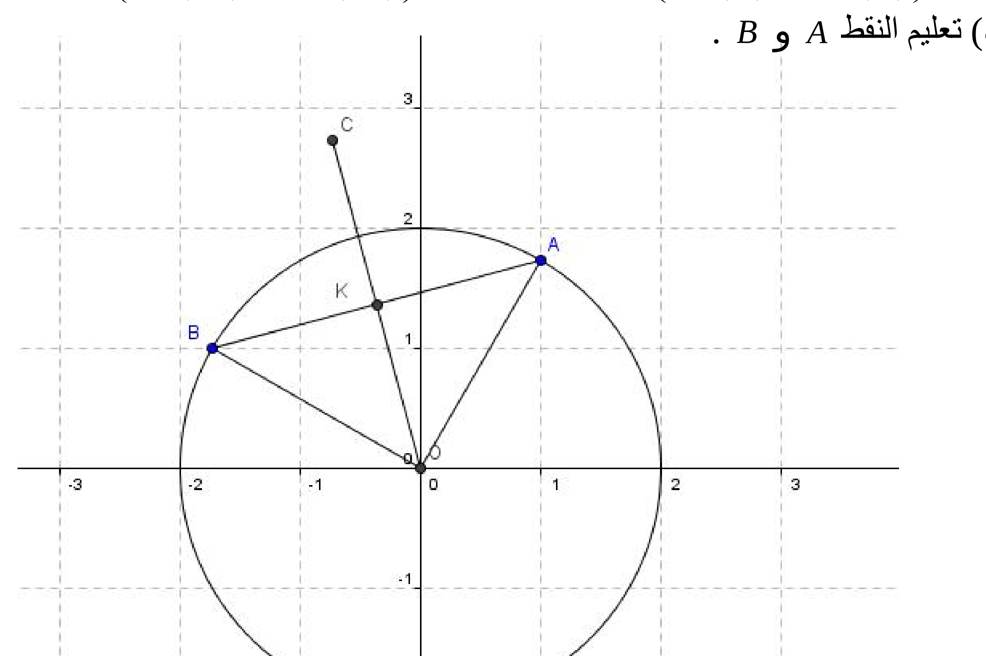
$\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)=0$ تكافئ $iz=-1-i\sqrt{3}$ أي : $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}-i$

لنحل المعادلة : $z^2-2z+4=0$

$\Delta=-12=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ، $z'=1-i\sqrt{3}$ ، $z''=1+i\sqrt{3}$ و منه : $S=\left\{-\sqrt{3}-i;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

2) أ) $z_A=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

ب) تعليم النقط $A$ و $B$ .




ج) لدينا : $OA=|z_A|=2$ ، $OB=|z_B|=2$ إذن : $OA=OB$ ومنه المثلث $OAB$ متساوي الساقين ومن جهة أخرى : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\arg(z_B)-\arg(z_A)=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه المثلث $OAB$ قائم .

إذن المثلث $OAB$ قائم و متساوي الساقين .

د) $z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}+i\right)}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

3) $z_C=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

البرهان أن $K$ منصف القطعة $[OC]$

لدينا : $\frac{z_O+z_C}{2}=\frac{1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}=z_K$ ومنه النقطة $K$ منتصف القطعة $[OC]$.

- البرهان أن الرباعي $OACB$ مربع.

بما أن النقطة $K$ منتصف $[OC]$ و $[AB]$ فإن الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع. لكن $OA=OB$ فإن الرباعي معين و إضافة الى أن قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$ فأن المعين $OACB$ هو مربع.

**حل التمرين الثاني:**

الاقتراح 1 صحيح

الاقتراح 2 خطأ

الاقتراح 3 صحيح

الاقتراح 4 صحيح

الاقتراح 5 خطأ

1) المستقيم $(D)$ الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=t+2\\ y=-2t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=3t-1\end{cases}$ له شعاع توجيه $\vec{u}(1;-2;3)$ و المستوي $(P)$ الذي معادلته الديكارتية: $x+2y+z-3=0$ له شعاع ناظمي $\vec{n}(1;2;1)$

لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=1\times1+(-2)\times2+3\times1=0$ ومنه المستقيم $(D)$ يوازي المستوي $(P)$ .

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P)\cap(P')\cap(P")$ معناه : $\begin{cases}x-2y+3z-3=0\\ 2x+3y-2z-6=0\\ 4x-y+4z-12=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=2y-3z+3\\ 2(2y-3z+3)+3y-2z-6=0\\ 4(2y-3z+3)-y+4z-12=0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x=2y-3z+3\\ 7y-8z=0\\ 7y-8z=0\end{cases}$ ومنه النقطة ذات الإحداثيات $(3;0;0)$ تنتمي الى المستويات الثلاث.

3) المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ الممثلا ن وسيطيا : $t\in\mathbb{R}$ $(d_1):\begin{cases}x=-2-3t\\ y=1+t\\ z=-3+2t\end{cases}$،

$u\in\mathbb{R}$ $(d_2):\begin{cases}x=7+u\\ y=2+2u\\ z=-6-u\end{cases}$ يكونا متقاطعين إذا و فقط إذا وجد عددان حقيقيان $t$ و $u$ بحيث

: $\begin{cases}2-3t=7+2u\\ 1+t=2+2u\\ -3+2t=-6-u\end{cases}$ حل هذه الجملة يعطي : $\begin{cases}u=-1\\ t=-1\end{cases}$ ومنه المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ متقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(5;0;-5)$ )

4) إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما: $(2;4;-2)$ و الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما : $(4;-4;-4)$، الشعاعان غير مرتبطين خطيا و عليه فإن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستوي وحيد. بالإضافة لدينا :

$\bullet -1+2-1=0$

$\bullet 1+0-1=0$ إذن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي الى المستوي الذي معادلته $x+z-1=0$ .

$\bullet 3-2-1=0$

5) إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما: $(3;0;-3)$ و الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هما : $(5;-2;2)$، هذان الشعاعان غير مرتبطين خطيا

الهندسة الفضائية

وعليه فإن النقطة $C$ لا تنتمي الى المستقيم $(AB)$ أو أيضا النقطة $C$ ليست مرجح للنقط $A$ و $B$ .

**حل التمرين الثالث:**

1) $u_1=-\frac{5}{3}$ ، $u_2=-\frac{14}{9}$ ، $u_3=-\frac{14}{27}$

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$ .

**نسمي** $p(n)$ هذه الخاصية.

- **نتحقق من صحة** $p(n)$ **من أجل** $n=4$ . $u_4=\frac{1}{3}u_3+3-2=\frac{67}{81}\succ 0$ **إذن** : $p(4)$ **محققة**.
- **نفرض أن** $p(k)$ صحيحة أي : $u_k\geq 0$ و نبرهن على صحتها من أجل $k+1$ **أي**: $u_{k+1}\geq 0$ .

**من اجل** $k\geq 4$ لدينا: $\frac{1}{3}u_k\geq 0$ **و** $k-2\geq 0$ **و بالجمع نجد**: $\frac{1}{3}u_k+k-2\geq 0$ **أي** : $u_{k+1}\geq 0$

و منه: **من أجل عدد طبيعي** $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$ .

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ ، $u_n\geq n-3$

**من أجل** $n\geq 5$ لدينا : $n\succ 4$ **و** $u_n=\frac{1}{3}u_{n-1}+(n-1)-2$ **مع** $u_{n-1}\geq 0$ و منه: $u_n\geq\frac{1}{3}\times 0+n-3$

**أي**: $u_n\geq n-3$

جـ) استنتاج نهاية المتتالية $(u_n)$.

**بما أن** : $u_n\geq n-3$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} n-3=+\infty$ **فإن** : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=+\infty$ **( النهايات و المقارنة)**

2) نعرف المتتالية $(v_n)$ كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$

أ) البرهان أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

$$v_{n+1}=-2u_{n+1}+3(n+1)-\frac{21}{2}=-2(\frac{1}{3}u_n+n-2)+3(n+1)-\frac{21}{2}$$

$$=-\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2}=\frac{1}{3}\left(-2u_n+3n-\frac{21}{2}\right)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-2u_0+3\times 0-\frac{21}{2}=-\frac{25}{2}$

ب) **حسب** $v_n$ **بدلالة** $n$ : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

جـ) إستنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

لدينا : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ **تكافئ** $u_n=-\frac{1}{2}v_n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ **نضع**: $T_n=v_0+v_1+...+v_n$ **و** $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

**حسب بدلالة** $n$ **المجموع** $T_n$ **ثم إستنتاج المجموع** $S_n$ **بدلالة** $n$ .

$$T_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\frac{25}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{75}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

**المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع**

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{21}{4}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{21}{4}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{3}{2}\times 2 - \frac{21}{4}$$

و بالجمعطرف لطرف نجد: .

.

$$u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}\times n - \frac{21}{4}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}(v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n)_n + \frac{3}{2}(0+1+2+...+n) - \frac{21}{4}(n+1)$$

إذن :

$$S_n = -\frac{1}{2}T_n + \frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 18n - 21}{4}$$

**حل التمرين الرابع:**

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

1) أ) **حساب** $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ لأن : $\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) = -4$ و $\lim_{x\to 2}\ln(x-2) = -\infty$ ونستنتج أن

**المنحنى** $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته : $x = 2$

ب) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ **من المجال** $]2,+\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3(\ln(x-1) - \ln(x-2)) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

جـ) **لستنتاج** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x-2} = 1$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x - 5 = +\infty$ إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) **حساب** $f'(x)$ ثم بيان أنه من اجل كل $x$ **من المجال**

$]2,+\infty[$ : $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2) + 3\times 2(x-2) - 3\times 2(x-1)}{2(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$$

**لستنتاج اتجاه تغير الدالة** $f$ ، **ثم تشكيل** جدول تغيراتها.

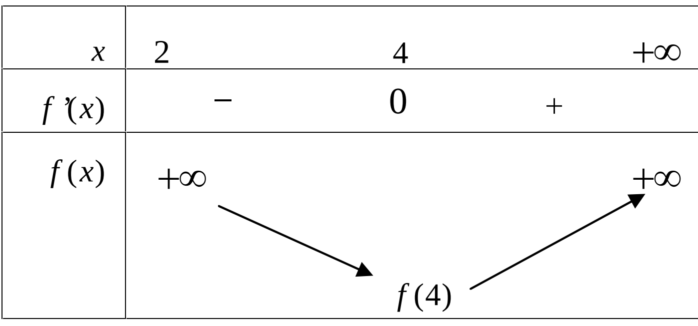
الدوال اللوغاريتمية و حساب الدوال الأصلية

إن أشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي إشارة $x^2-3x-4$ لأن المقام موجب تماما.

$\Delta = 25 \succ 0$ ، $x' = -1$ و $x'' = 4$

| $x$ | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

جدول التغيرات :



| $x$ | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(4)$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f(4) = \frac{1}{2}\times 4 - 5 + 3\ln\left(\frac{4-1}{4-2}\right) = -3 + 3\ln\frac{3}{2}$$

3) بيان أن المستقيم $(\Delta)$ **الذي** معادلة له : $y = \frac{1}{2}x - 5$ **هو**

مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ **بجوار** $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2}x - 5\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right) = 0$ ومنه المستقيم

$(\Delta)$ الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x - 5$ **مقارب مائل للمنحني** $(C_f)$ **عند** $+\infty$.

5) **بيان أن المعادلة** $f(x) = 0$ تقبل حلين ~ **و** حيث : $2.3 \le \sim \le 2.4$ **و** $9.2 \le \quad \le 9.3$ .

الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2.3;2.4]$ و $f(2.3) \approx 0.55$ ، $f(2.4) \approx -0.04$

و العدد 0 محصور بين $f(2.3)$ و $f(2.4)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

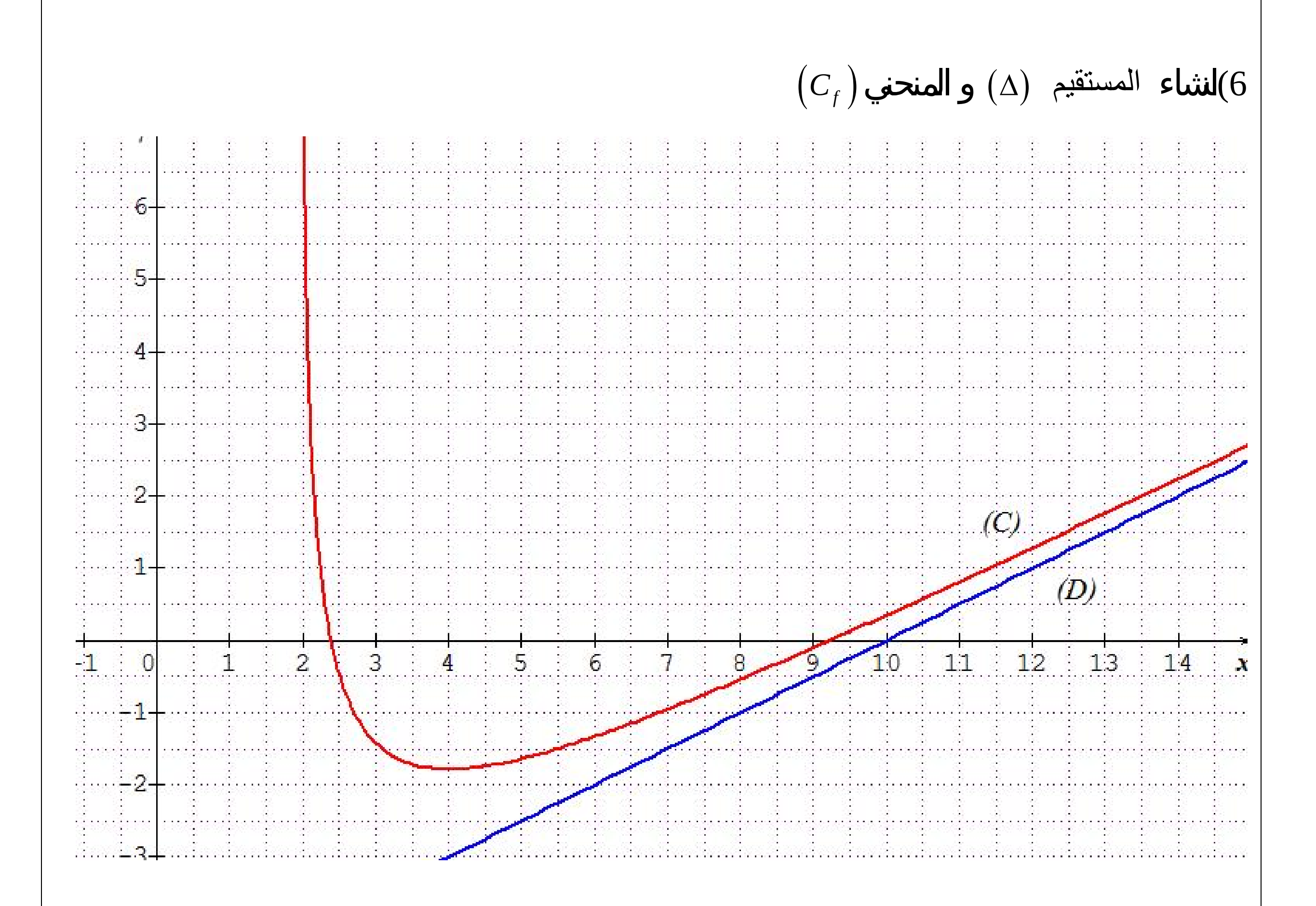
تقبل حلا وحيدا ~ على المجال $[2.3;2.4]$.

**و بالمثل** الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[9.2;9.3]$ و $f(9.2) \approx -0.01$ ، $f(9.3) \approx 0.04$

و العدد 0 محصور بين $f(9.2)$ و $f(9.3)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا على المجال $[9.2;9.3]$.

6)إنشاء المستقيم $(\Delta)$ و المنحني $(C_f)$




7) أ) بيان أن $H$ هي دالة أصلية للدالة $h$ على المجال $]2,+\infty[$ .

من أجل كل $x$ من $]2,+\infty[$ :

$$H'(x)=1\times\ln(x-1)+(x-1)\times\frac{1}{x-1}-1\times\ln(x-2)-(x-2)\times\frac{1}{x-2}$$
$$=\ln(x-1)+1-\ln(x-2)-1=\ln(x-1)-\ln(x-2)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

إذن من أجل $x$ من $]2,+\infty[$ : $H'(x)=h(x)$ و منه $H$ هي دالة أصلية للدالة $h$ على المجال $]2,+\infty[$

ب)إستنتاج دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال $]2,+\infty[$ .

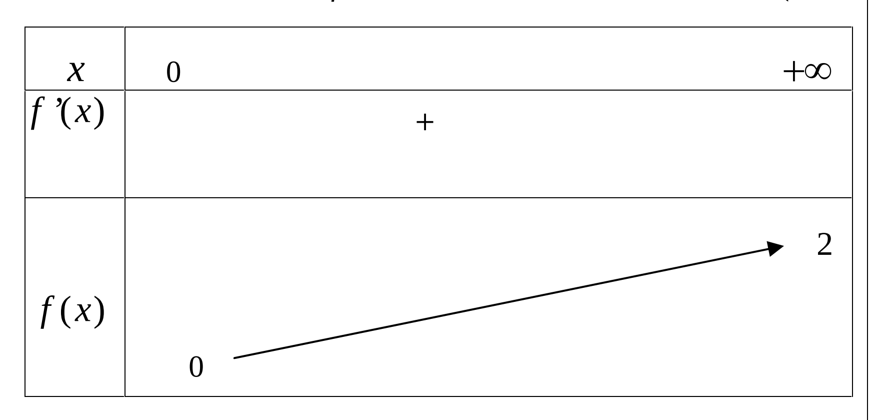
من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]2,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ و منه الدالة $F$ المعرفة

بـ : $F(x)=\frac{1}{4}x^2-5x+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)+C$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]2,+\infty[$ .

# الموضوع الأول

**حل التمرين الأول:**

1) بـــقراءة بيانية نشكل جدول تغيرات **الدالة** $f$



| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ ↗ $2$ |

2) بيان أنه إذا كان $x\in\left[1,\sqrt{3}\right]$ **فإن** $f(x)\in\left[1,\sqrt{3}\right]$

لدينا : $1\le x\le\sqrt{3}$; **و بما أن الدالة** $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ **فإن** : $f(1)\le f(x)\le f\left(\sqrt{3}\right)$ أي :

$1\le\frac{2}{\sqrt{2}}\le f(x)\le\sqrt{3}$ **إذن** : $f(x)\in\left[1,\sqrt{3}\right]$

3) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=1$ و **من اجل كل** عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) **باستعمال المنحنى** $(C)$ والمستقيم ذو المعادلة $y=x$، **تمثيل الحدود** $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ **على محور الفواصل**

ب) **وضع تخمينا** حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها .

يظهر أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة و متقاربة

ج )**البرهان** بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

**أعداد مركبة و تحويلات نقطية**

| | | |
|---|---|---|
| | من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=1$ إذن : $1\le u_0\le\sqrt{3}$<br>فرض أن : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ صحيحة و نبرهن أن : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$<br>لدينا : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ و بما أن الدالة $f$ متزايدة تما ما فإن : $f(1)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$ أي : $1\le\frac{2}{\sqrt{2}}\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$<br>ومنه : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\le u_n\le\sqrt{3}$<br>د) بيان انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .<br>لدينا : $\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}=u_n\left(\frac{2-\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)=u_n\left(\frac{2}{\sqrt{1+u_n^2}}-1\right)=\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}-u_n=u_{n+1}-u_n$<br>نعلم أن : $u_n\le\sqrt{3}$ ومنه $\sqrt{1+u_n^2}\le 2$ أي : $2-\sqrt{1+u_n^2}\ge 0$ و بالتالي المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.<br>4) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.<br>أ- بيان أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول<br>لدينا : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}=\frac{4u_n^2}{3\left(1+u_n^2\right)-4u_n^2}=4\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}=4\times v_n$<br>ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=\frac{1^2}{3-1^2}=\frac{1}{2}$<br>ب- كتابة عبارة $v_n$ ثم استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$<br>لدينا : $v_n=v_0\times q^n=\frac{1}{2}\times 4^n=2^{2n-1}$<br>$v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ معناه : $v_n\times\left(3-u_n^2\right)=u_n^2$ أي : $3v_n-v_n\times u_n^2=u_n^2$ ومنه : $u_n^2=\frac{3v_n}{1+v_n}$ أي :<br>$u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}=\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}$<br>جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}\times\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right)}}=\sqrt{3}$<br>ومنه نستنتج ان المتتالية $(u_n)$ مقاربة و تقارب نحو العدد $\sqrt{3}$ .<br>**حل التمرين الثاني:**<br>1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ | الهندسة الفضائية |

$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 4\times1\times4 = -12 = 12i^2 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ، $z' = \dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$ ،

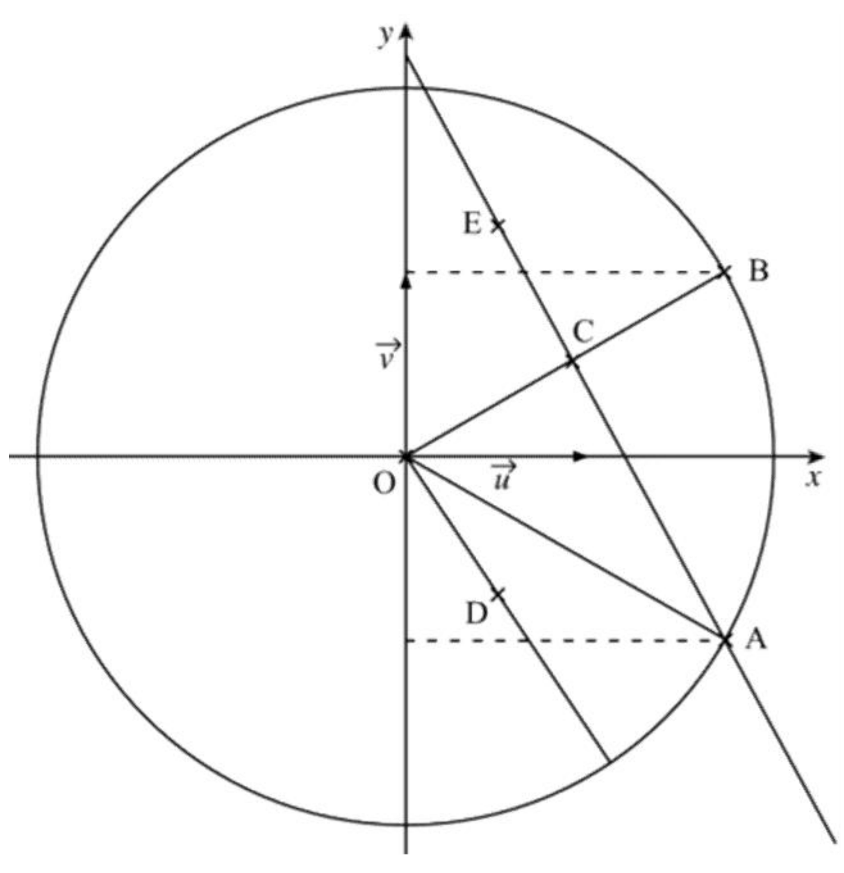
$$z'' = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$$

أ) كتابة كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي.

$|z_A| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ ، $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta_A = -\dfrac{®}{6}$ إذن : $z_A = 2e^{-i\frac{®}{6}}$

$z_B = \overline{z_A} = 2e^{i\frac{®}{6}}$ ، $z_c = \dfrac{z_B}{2} = e^{i\frac{®}{6}}$

ب) تعليم النقط $A$ ، $B$ و $C$ ( أنظر للشكل).




جـ) البرهن أن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

لدينا : $OA = |z_A| = 2$ ، $OB = |z_B| = 2$ ، $AB = |z_B - z_A| = \left|\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right| = |2i| = 2$

أو: $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{2e^{-i\frac{®}{6}}}{2e^{i\frac{®}{6}}} = e^{-i\frac{®}{3}}$ ، $\left|\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right| = \dfrac{OA}{OB} = 1$ ومنه : $OA = OB$ ،

الدوال اللوغاريتمية و الحساب التكاملي

$$\arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} = \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$$

**و منه المثلث** $OAB$ **متقايس الأضلاع.**

3)أ) تعليم النقطتان $D$ و $E$ ( **أنظر الشكل**) .

ب)البرهان أن : $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$

الصيغة المركبة **للدوران** هي : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و **للإنسحاب** $t$ هي : $z' = z + 2i$ و منه :

$z_D = -iz_C$ و $z_E = 2i + z_D$ وعليه نحصل : $z_E = 2i - iz_C$

$$z_E = 2i - ie^{i\frac{\pi}{6}} = 2i - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2i - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \text{ ، } z_E = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)i = \frac{1}{2}\left(1 + \left(4 - \sqrt{3}\right)i\right)$$

$$OE = |z_E| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

$$BE = |z_E - z_B| = \left|\frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - \sqrt{3} - i\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

4) بيان أن النقط $A$ ، $C$ و $E$ في إستقامية .

**لاحقة للشعاع** $\overrightarrow{AC}$ هي : $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} + i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ **و لاحقة للشعاع** $\overrightarrow{AE}$ هي

$$z_E - z_A = \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right):$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ و $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3};3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و **بالتحقق بإستعمال شرط التوازي نجد:**

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا

و هذا يعني أن النقط $A$ ، $C$ و $E$ في إستقامية .

## حل التمرين الثالث:

نعتبر النقط $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ ، $B(1\ ;\ 2\ ;\ \text{-}1)$ و $C(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$

1)أ– حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم الأطوال $AB$ و $AC$ .

$\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 0 + 2\times 2 + (-2)\times 1 = 2$

من جهة أخرى: $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ ، $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ب – إستنتج قيمة مقربة مقدرة بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$ .

نعلم أن : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{85}}$ و باستعمال الحاسبة نجد: $\widehat{BAC}=77\deg rés$

جـ –إستنتاج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

بما أن : $\widehat{BAC}\neq 0^{\circ}$ و $\widehat{BAC}\neq 180^{\circ}$ فإن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

2)التحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي: $2x-y+2z+2=0$ .

لدينا : $2\times(-2)-0+2\times1+2=0$ ومنه : $A\in(P)$

$2\times1-2+2\times(-1)+2=0$ ومنه : $B\in(P)$

$2\times(-2)-2+2\times2+2=0$ ومنه : $C\in(P)$

النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي الى نفس المستوي $(P)$ وهي ليست في استقامية فهي تعين مستوي وحيد ومنه نستنتج أن المستوي $(ABC)$ هو المستوي $(P)$.

3)ليكن $(P_1)$ و $(P_2)$ المستويين اللذين معادلتيهما $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$ على الترتيب.

- البرهان أن $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان وفق المستقيم $(D)$ الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

**لدينا :** $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ ، شعاعان ناظميان لـ $(P_1)$ ، $(P_2)$ ، على الترتيب

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن $(P_1)$ و $(P_2)$ ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم $(D)$

لدينا : $\begin{cases}x+y-3z+3=0\\ -x-2y+6z=0\end{cases}$ بعد الحساب نجد : $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

4)بيان أن $(D)$ و $(ABC)$ متقاطعان ثم تعيين نقطة تقاطعهما.

لتكن: $M(-2;-1+3t;t)$ نقطة من $(D)$

$M\in(ABC)$ معناه : $2\times(-2)-(-1+3t)+2(t)+2=0$ أي : $t=-1$

من أجل $t=-1$ نحصل على النقطة ذات الإحداثيات $(-2;-4;-1)$ وعليه فإن $(D)$ و $(ABC)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $(-2;-4;-1)$.

**حل التمرين الرابع:**

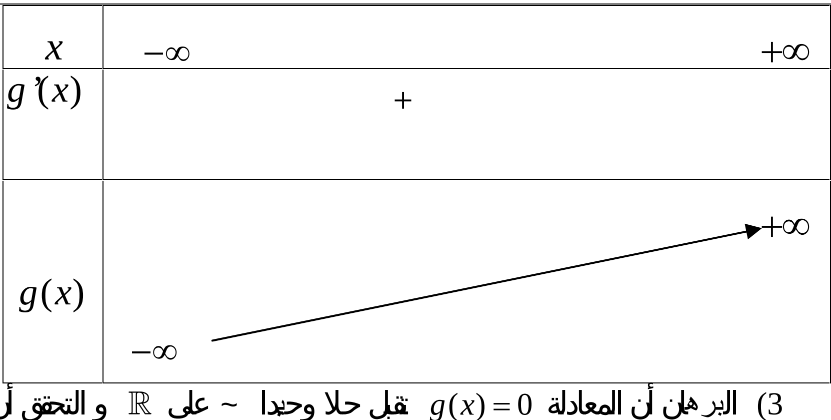
**I – نعتبر الدالة $g$ المعرفة على** $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^x+x+1$

(1 **حساب** $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x+1\right)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x+1\right)=+\infty$

(2 **دراسة** اتجاه تغير الدالة $g$ **ثم تشكيل** جدول تغيراتها.

**من أجل كل** $x$ **من** $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x)=e^x+1\succ 0$ ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.



| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

3) البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على $\mathbb{R}$ و التحقق أن: $-1.28 \prec \sim \prec -1.27$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ و العدد 0 محصور بين $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على $\mathbb{R}$ .

لدينا : $g(-1.28)\approx -1.962699547\times10^{-3}$ ، $g(-1.27)\approx 1.083162178\times10^{-2}$ و منه $g(-1.28)\times g(-1.27)\prec 0$:

ج)استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$ .

| $x$ | $-\infty$ | $\sim$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II – نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$

1) أ– حسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}(x)}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\dfrac{1}{e^x}}=+\infty$$

2) بيان أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\times g(x)$ ،استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x+1\right)-e^x\left(xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left((1+x)\left(e^x+1\right)-xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x+1+xe^x+x-xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+1+x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\times g(x)$$

إن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي سالبة على المجال $]-\infty;\sim[$ و موجبة على المجال $]\sim;+\infty[$ و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\sim[$ متزايدة تماما على المجال $]\sim;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\sim$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\sim)$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(\sim) \approx -0.28$

3) بيان أن : $f(\sim) = \sim + 1$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\sim)$ ( تدور النتائج الى $10^{-2}$ ).

لدينا : $f(\sim) = \dfrac{\sim e^{\sim}}{e^{\sim}+1}$ لكن : $g(\sim) = e^{\sim} + \sim + 1$ أي : $e^{\sim} = -\sim - 1$ ومنه : $f(\sim) = \dfrac{\sim(-\sim-1)}{-\sim-1+1} = \sim + 1$

بما أن : $-1.28 \prec \sim \prec -1.27$ فإن : $-.28 \prec f(\sim) \prec -.27$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x$ .

لدينا : $f(x) - y = \dfrac{xe^x}{e^x+1} - x = \dfrac{xe^x - xe^x - x}{e^x+1} = -\dfrac{x}{e^x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(-x)$ أي المنحنى

$(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ في المجال $]-\infty;0[$ وفوقه في المجال $]-\infty;0[$ ويتقاطعان في مبدأ الإحداثيات.

5) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2}x$

6) رسم $(\Delta)$،$(T)$ و $(C_f)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية تبسة

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة:ماي 2015

الشعبة : علوم تجريبية — ثانوية الإخوة عمران– نقرين

اختبار في مادة: الرياضيات — المـدة : 3 سا و30د

**على المترشح أن يختارأحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (05 نقاط)

ننسب الفضاء إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;-1;1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C(2;-2;1)$ و $D(2;2;2)$ .

1– أ . برهن أنّ النقط $A$ ،$B$ و $C$ تعين مستويا.

ب . تحقق أن $2x+z-5=0$ معادلة ديكارتية لـ$(ABC)$.

2– ليكن$(\Delta)$ مستقيم معرف بتمثيله الوسيطي : $t\in R$ ; $\begin{cases}x=-2+4t\\y=2\\z=2t\end{cases}$

– بيّن أنّ النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ و أنّ المستقيم $(\Delta)$ عمودي على$(ABC)$.

3–لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

أ. عين إحداثيات النقطة $H$ .

ب.استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$.

4–ماهي المجموعة $(S)$ للنقط $M$ من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{DM}^2=\frac{103}{5}$ ؟

### التمرين الثاني:(05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$ .

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقطتان $A$ و $B$ لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ .

* أكتب كلا من $z_A$ و $z_B$ على الشكلين المثلثي و الأسى .
* أحسب العدد $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1436}$ .

3. $L$ تحويل نقطي عبارته المركبة: $\grave{z}=2iz+3$ .

– عين طبيعة التحويل $L$ و أذكر عناصره المميزة.

– أوجد لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالتحويل $L$ .

4. عين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث: $|iz+1-\sqrt{3}\,i|=|z-\sqrt{3}+i|$.

## التمرين الثالث: (10 نقاط)

I. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة g .
2. احسب $g(1)$ ، استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. لتكن $f$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:
$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. أ- أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.
   ب- أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
2. أ- بين أنه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
   ب- استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و أنشئ جدول تغيراتها.
3. أ- ليكن $(D)$ مستقيم معادلته $y = x$. أحسب $\lim_{x\to +\infty}[f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
   ب- أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$.
4. بين أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
5. أرسم $(D)$ و $(C_f)$ .
6. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و ومحور الفواصل والمستقيمان اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$ .
7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$x^2 - mx - \ln x = 0$$

III. نعتبر الدالة $h$ ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $R$ كما يلي: $h(x) = f(e^x)$ .

1. بين أنه من أجل كل $x$ من $R$ لدينا: $h(x) = \frac{e^{2x} - x}{e^x}$
2. استنتج جدول تغيرات الدالة $h$ .

IV. لتكن $(u_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ .

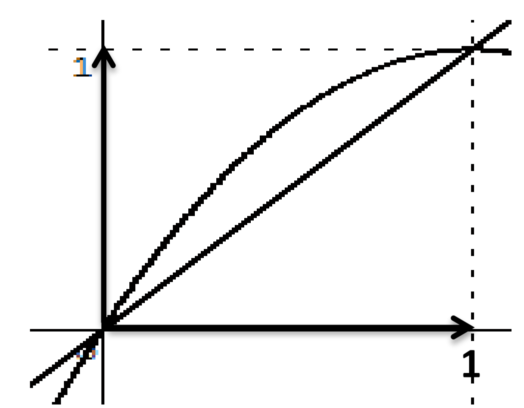
1. بإستعمال رسم $(D)$ و $(C_f)$ مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها.
2. باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $1 \le u_n \le e$ .
3. بين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.
4. هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة؟ برر.
5. أحسب $\lim_{n\to +\infty} u_n$.

# الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 10 = 0$ .
2. في المستوي المركب نعتبر النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتاهما $z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$ .
   وليكن $r$ الدوران الذي مركزه $A$ و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له .أوجد العبارة المركبة للدوران $r$ .
3. أ- أوجد لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدواران $r$.
   ب-استنتج طبيعة المثلث $ABC$.
4. لتكن النقطة $D(1;1)$. و ليكن العدد المركب $L = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$ .
   أ- أكتب $L$ على الشكل الجبري ثم المثلثي و الأسي.
   ب- أحسب $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^{2015}$.
   ج-عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون: $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

**التمرين الثاني: (04.5 نقاط)**




في معلم متعامد ومتجانس $(O;\ \vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $8cm$
مثّلنا المنحني $(C_f)$ بيان الدالة $f(x) = x(2 - x)$
على المجال $[0;1]$ و المنصف الأول $(y = x)$.
ولتكن $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{8}$
و $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ .

1. بإستعمال الرسم المقابل مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها.
2. أ)باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي$n$: $0 < u_n < 1$ .
   ب)استنتج اتجاه تغيير المتتالية $(u_n)$. هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة؟ برر .
3. لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = ln(1 - u_n)$ .
   أ) بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   ب) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ و استنتج $u_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب: $lim_{n\to+\infty} u_n$ .
   ج) أوجد بدلالة $n$ المجموع : $s = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط: $A(1;-2;4)$ ،
$B(-2;-6;5)$ ، $C(-4;0;-3)$ و $D(-\frac{1}{2};-3;2)$ .

1. أ- بين أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

ب− بين أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ ناظمي للمستوي$(ABC)$ .

جـ− اوجد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2. أ− عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $D$و العمودي على المستوي $(ABC)$.

ب− استنتج إحداثيات النقطة $G$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي$(ABC)$.

جـ− تحقق أن النقطة $G$ هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2);(B;1);(C.1)\}$.

د−عين مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث: $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\|=d(O;(ABC))$.

**<u>التمرين الرابع:</u> (07.5 نقاط)**

I) − $g$ دالة عددية معرفة على $R$ بـ: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. أحسب نهايات الدالة $g$ عند حدود مجموعة تعريفها.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0.38;-0.37[$.

4. استنتج اشارة $g(x)$ على $R$ .

II) − $f$ دالة عددية معرفة على $R$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1. − أ− أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها.

ب− بين أن : $f'(x)=g(x)$ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.

2. أ− بين أن المستقيم $(d)$ ذي المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$عند $+\infty$.

ب− أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(d)$.

3. بين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

4. أرسم$(d)$ و $(C_f)$ نأخذ $\alpha=-0.37$ .

5. أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات $y=2x+1$ ، $x=0$ و $x=2$ .

III) − $(\Delta_m)$ مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث $m$ عدد حقيقي .

1. عين $m$ حتى يكون $(\Delta_m)$ مماسا للمنحني $(C_f)$عند نقطة يطلب تعيين احداثياتها.

2. أكتب معادلة للمماس$(\Delta_m)$ في هذه الحالة.

3. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$1-\frac{x}{e^x}-m=0$$

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة — التنقيط

## التمرين الأول: (05 نقاط).........

1. – أ– لدينا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ **0.5**

ومنه $z_{\overrightarrow{AC}} = 1z_{\overrightarrow{AB}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AC}} \neq 1x_{\overrightarrow{AB}}$ ومنه

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا . **0.5**

وهذا يعني أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستوي.

ب– $A \in (ABC): 4+1-3=0$ **0.25**

$B \in (ABC): 2+3-5=0$ **0.25**

$C \in (ABC): 4+1-5=0$ **0.25**

محققة.

2. $D$ تنتمي إلى $(\Delta)$ من أجل $\boxed{t=1}$ . **0.5**

- ولدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه $(\Delta)$

يوازي $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ لأن $\vec{u}=2\vec{n}$ . **0.5**

ومنه $(\Delta)$ يعامد $(ABC)$.

3. أ– $H$ هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(ABC)$.

$2(-2+4t)+2t-5=0$

$t=\boxed{\frac{9}{10}}$ **0.5**

بالتعويض نجد: $H(\frac{8}{5};2;\frac{9}{5})$ .

ب– المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

$d(A;(\Delta)) = AH$ **0.25**

$AH = \sqrt{\frac{49}{5}} = \boxed{7\frac{\sqrt{5}}{5}}$ **0.25**

4. المجموعة $(S)$ للنقط $M$ من الفضاء .

لتكن النقطة $\boxed{G(2;\frac{1}{2};\frac{3}{2})}$ منتصف القطعة المستقيمة $[AD]$ . **0.5**

لدينا $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{DM}^2=\frac{103}{5}$ يعني

$(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})^2+(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GM})^2=\frac{103}{5}$

ومنه: $\overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{AG}\overrightarrow{GM}$

$+\overrightarrow{DG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{DG}\overrightarrow{GM}=\frac{103}{5}$ **0.5**

ومنه: $2\overrightarrow{GM}^2+\overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{DG}^2$

$+2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DG})=\frac{103}{5}$

لدينا $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

و لدينا $\overrightarrow{AG}^2=\overrightarrow{DG}^2=\frac{5}{2}$

ومنه $2\overrightarrow{GM}^2+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=\frac{103}{5}$

ومنه $\overrightarrow{GM}^2=\frac{64}{5}$

ومنه $\boxed{GM=\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{8}{5}\sqrt{5}}$ **0.25**

المجموعة $(S)$ سطح كرة مركزه المنتصف $G$ ونصف قطره $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ .

## التمرين الثاني: (05 نقاط).........

1. $\Delta = -4 = \boxed{(2i)^2}$ **0.5**

ومنه يوجد حلين مركبين:

$z_1 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \boxed{\sqrt{3}-i}$ **0.25**

$z_2 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \boxed{\sqrt{3}+i}$ **0.25**

2. $z_A = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ **0.25**

$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **0.25**

$z_B = \boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ **0.25**

$= \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ **0.25**

* $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1436} = \left[\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2}\right]^{1436}$

$= \left[e^{i\frac{\pi}{6}}\right]^{1436} = e^{1436\frac{\pi}{6}i}$ **0.25**

$= e^{240\pi - i4\frac{\pi}{6}} = e^{-i4\frac{\pi}{6}} = e^{-i2\frac{\pi}{3}}$

$= e^{-i2\frac{\pi}{3}} = \cos2\frac{\pi}{3} - i\sin2\frac{\pi}{3}$

$= \cos(\pi-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})$

$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **0.25**

3. طبيعة $L$ حيث $z' = 2iz+3$ . **0.25**

$L$ تشابه مباشر نسبته $k=|2i|=\boxed{2}$ **0.25**

و زاويته $\theta=\arg(2i)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$ ومركزه **0.25**

ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{3}{1-2i} = \boxed{\frac{3}{5}+i\frac{6}{5}}$ **0.25**

| (الموضوع الأول) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| – لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بـ $L$: | |
| $z_D = 2iz_B + 3$ | 0.25 |
| $z_D = 2i(\sqrt{3} + i) + 3$ | |
| ومنه : $z_D = 1 + 2i\sqrt{3}$ | 0.25 |
| 4. مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث: | |
| $\lvert z - \sqrt{3} + i\rvert = \lvert iz + 1 - \sqrt{3}\, i\rvert$. | |
| $\lvert z - (\sqrt{3} - i)\rvert = \lvert i\rvert \left\lvert z + \frac{1}{i} - \sqrt{3}\right\rvert$ | 0.25 |
| $\lvert z - (\sqrt{3} - i)\rvert = \lvert z - i - \sqrt{3}\rvert$ | 0.25 |
| $\lvert z - (\sqrt{3} - i)\rvert = \lvert z - (i + \sqrt{3})\rvert$ | |
| $\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$ | 0.25 |
| يعني $AM = BM$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$. | 0.25 |
| **التمرين الثالث: (10 نقاط)** | |
| I. $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ | |
| 1. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ | 0.5 |
| ومنه g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$. | |
| 2. $g(1) = 0$ | 0.25 |
| إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$. | |

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |

التنقيط: 0.5

| (الموضوع الأول) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| II. $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ | |
| 1. أ- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ | 0.25 |
| تفسيرها البياني $x = 0$ م مقارب عمودي. | 0.25 |
| ب- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. | 0.25 |
| 2. أ- $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ | |
| $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ | 0.5 |
| ب- جدول التغيرات . | 0.5 |

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 1 | ↗ $+\infty$ | |

| (الموضوع الأول) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| 3. أ- $(D): y = x$ . | |
| $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ | 0.25 |
| $(D)$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ . | 0.25 |
| ب- أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(D)$. | |
| ندرس إشارة الفرق : $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ | |

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الفرق | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |
| الوضعية | ‖ | $(C_f)$ فوق $(D)$ | ينطبق | $(C_f)$ تحت $(D)$ | |

التنقيط: 0.5

| (الموضوع الأول) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| 1. $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف : | |
| لدينا $f''(x) = \frac{3x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$ | 0.25 |
| $3 - 2\ln x = 0$ يعني $x = e^{\frac{3}{2}}$ | 0.25 |
| المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم عند $x = e^{\frac{3}{2}}$ مغيرة إشارتها ومنه نقطة الانعطاف | |
| $I(e^{\frac{3}{2}}; f(e^{\frac{3}{2}}))$ أي $I(e^{\frac{3}{2}}; e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ | 0.25 |
| لاحظ $e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \simeq 4.81$ | |
| 5. الرسم: | 0.25 |
| $(C_f)$ ، $y = x$ | 0.5 |
| 6. المساحة: | |
| $s = \int_1^e f(x)\,dx$ | 0.25 |
| $= \int_1^e x - \frac{\ln x}{x}\,dx$ | |
| $s = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e ua$ | |
| $s = \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] ua$ | |
| $s = \left[\frac{1}{2}e^2 - 1\right] ua$ | 0.25 |

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة — التنقيط

7. المناقشة البيانية:

$x^2 - mx - \ln x = 0$

يعني $x^2 - \ln x = mx$

يعني $x - \frac{\ln x}{x} = m$

**0.25**

يعني $f(x) = m$

لما $m < 1$ لا توجد حلول .

**0.5**

لما $m = 1$ يوجد حل مضاعف موجب تماما.

لما $m > 1$ يوجد حلين موجبين تماما.

III. $h(x) = f(e^x)$ .

**0.25**

1. لدينا $h(x) = f(e^x)$

$= e^x - \frac{\ln e^x}{e^x}$

$= e^x - \frac{x}{e^x} = \boxed{\frac{e^{2x} - x}{e^x}}$

2. جدول تغيرات الدالة $h$

لدينا $h'(x) = e^x f'(e^x)$

و بما أن $e^x > 0$ و $e^0 = 1$ فإن:

**0.5**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $+\infty$ ↘ | $1$ | ↗ $+\infty$ |

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة — التنقيط

IV. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة بـ:

$u_0 = e$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. تمثيل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها.

**1**

$u_3$ $u_2$ $u_1$ $u_0$

$y = x$

2. البرهان بالتراجع

أولا: نتأكد من صحة $p(0)$

**0.25**

$\boxed{1 \le u_0 \le e}$ محققة.

ثانيا:نفرض أن $p(n)$ ونتأكـــد من صحة $p(n+1)$ .

الفرض $p(n):\quad 1 \le u_n \le e$

الطلب $p(n+1):\quad 1 \le u_{n+1} \le e$

الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[1; e]$

ومنه إذا كان $1 \le u_n \le e$

فإن $f(1) < f(u_n) < f(e)$

**0.25**

ومنه $\boxed{1 \le u_{n+1} \le e - \frac{1}{e} \le e}$ و هـ م.

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة — التنقيط

3. حتى نبين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ندرس إشـــارة

الفـــــرق: $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = u_n - \frac{\ln u_n}{u_n} - u_n$

**0.25**

$= \boxed{-\frac{\ln u_n}{u_n}}$

**0.25**

بما أن $1 \le u_n \le e$ فإن $-\frac{\ln u_n}{u_n} < 0$

ومنه $(u_n)$متناقصة تماما.

**0.25 / 0.25**

4. $(u_n)$ متقاربة لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل .

5. حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

**0.25**

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

لأن $u_{n+1} = u_n - \frac{\ln u_n}{u_n}$

نضع $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

نجد $l = l - \frac{\ln l}{l}$

و منه $-\frac{\ln l}{l} = 0$

يعني $\ln l = 0$

و منه $\boxed{l = 1}$

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| **......التمرين الأول: (04 نقاط)..........** | |
| 1. حل المعادلة: $z^2-6z+10=0$ | |
| لدينا $\Delta=\boxed{-4=(2i)^2}$ | 0.5 |
| ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين هما: | |
| $z_1=\boxed{3-i}$ و $z_2=\boxed{3+i}$ | 0.5 |
| 2. الكتابة المركبة للدوران $r$ : | |
| $\boxed{z'=iz+2-4i}$ | 0.75 |
| 3. أ-لاحقة النقطة $C$ : | |
| $z_C=iz_B+2-4i$ ومنه $\boxed{z_C=1-i}$ | 0.25 |
| ب- المثلث $ABC$ قائم في $A$ ومتساوي الساقين . | 0.5 |
| 4. أ- $L=\boxed{1-i}$ | 0.25 |
| $=\boxed{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}$ | 0.25 |
| $=\boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ | 0.25 |
| ب- $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^{2015}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{2015}$ | 0.25 |
| $=e^{-i2015\frac{\pi}{4}}=e^{-i(504\pi-\frac{\pi}{4})}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ | |
| $=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ | |
| ج- $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^{n}=e^{-in\frac{\pi}{4}}$ | |
| $=\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)$ | 0.25 |

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| $\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ حقيقي يعني $\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)=0$ | |
| يعني $\frac{-n\pi}{4}=k\pi$ ومنه $n=-4k$ | |
| أي $\boxed{n\in\{0;4;8;12;...\}}$ | 0.25 |
| **....التمرين الثاني: (04.5 نقاط).........** | |
| 1. (رسم بياني: $u_0$ $u_1$ $u_2$ $u_3$ ، 1) | 1 |
| 2. أ- أولا: نتأكد من صحة $p(0)$ | |
| $\boxed{0<u_0<1}$ محققة. | 0.25 |
| ثانيا:نفرض أن $p(n)$ ونتأكـــد من صحة $p(n+1)$ . | |
| الفرض $p(n):\quad 0<u_n<1$ | |
| الطلب $p(n+1):\quad 0<u_{n+1}<1$ | 0.25 |
| الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ | |
| ومنه إذا كان $0<u_n<1$ | |
| فإن $f(0)<\ f(u_n)<f(1)$ | 0.25 |
| ومنه $\boxed{0<u_{n+1}\ <1}$ و هـ م . | |
| ب- نحسب الفرق : $u_{n+1}-u_n$ | |
| $u_{n+1}-u_n=u_n(2-u_n)-u_n$ | 0.25 |
| $=u_n(1-u_n)>0$ | |
| لأن $0<u_n<1$ | |
| ومنه $(u_n)$متزايدة تماما. | 0.25 |
| $(u_n)$ متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الاعلى . | 0.25 |

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| 3. أ-لدينا $v_n=ln(1-u_n)$ | |
| ومنه $v_{n+1}=ln(1-u_{n+1})$ | |
| $v_{n+1}=ln(1-u_n(2-u_n))$ | |
| $v_{n+1}=ln(1-2u_n+{u_n}^2)$ | |
| ب- ومنه $v_{n+1}=ln(1-u_n)^2$ | |
| ومنه $v_{n+1}=2ln(1-u_n)$ | |
| $v_{n+1}=2v_n$ و هـ م | 0.5 |
| و منه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ | 0.25 |
| وحدها الأول: $v_0=ln\frac{7}{8}$ | 0.25 |
| $\boxed{v_n=\left(ln\frac{7}{8}\right)2^n}$ | 0.25 |
| $\boxed{u_n=1-e^{\left(ln\frac{7}{8}\right)2^n}}$ | 0.25 |
| $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-e^{\left(ln\frac{7}{8}\right)2^n}\right)=\boxed{1}$ (0) | 0.25 |
| لأن $ln\frac{7}{8}<0$ | |
| ج- $s=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ | |
| $s=\boxed{\left(ln\frac{7}{8}\right)[2^{n+1}-1]}$ | 0.25 |
| **....التمرين الثالث: (04 نقاط)...........** | |
| 5. أ- لدينا | |
| $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$ | 0.5 |
| $z_{\overrightarrow{AC}}=-7z_{\overrightarrow{AB}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AC}}\neq-7x_{\overrightarrow{AB}}$ | 0.25 |
| ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا . وهذا يعني أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية. و هـ م. | |

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة — التنقيط

ب- الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ يعني أن

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ $\begin{cases}-3+4-1=0\\ -5-2+7=0\end{cases}$ **0.25** **0.25**

محققة.

جـ- تعيين معادلة للمستوي $(ABC)$.

معادلة المستوي $(ABC)$ هي $x-y-z+1=0$ **0.25**

6. أ-تعيين التمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$:

$\begin{cases}x=t-\frac{1}{2}\\ y=-t-3\\ z=-t+2\end{cases}$ لأن $(\Delta)//\vec{n}$ **0.75**

ب- تعيين إحداثيات النقطة $G$ :

$G$ هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ و المستوي $(ABC)$.

$\left(t-\frac{1}{2}\right)-(-t-3)-(-t+2)+1=0$ **0.25**

ومنه $3t=-\frac{3}{2}$ أي $t=\frac{-1}{2}$ و منه

احداثيات النقطة $G\left(-1;-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$. **0.25**

جـ- $G$ مرجح يعني

$\begin{cases}x_G=\frac{2-2-4}{2+1+1}=-1\\ y_G=\frac{-4-6+0}{2+1+1}=-\frac{5}{2}\\ z_G=\frac{8+5-3}{2+1+1}=\frac{5}{2}\end{cases}$ **0.5**

محققة.

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة — التنقيط

د- مجموعة النقط: لدينا

$d(O;(ABC))=\frac{|0-0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **0.25**

ومنه $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

أي $\|4\overrightarrow{GM}\|=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و منه $GM=\frac{\sqrt{3}}{12}$ **0.25**

مجموعة النقط سطح كرة مركزه المرجح $G$ ونصف قطره $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **0.25**

**....التمرين الرابع: (07.5 نقاط)..........**

I) - $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$ **0.25**

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ **0.25**

2. $g'(x)=-xe^{-x}$ **0.25**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $2$ |

**0.5**

3. بما أن الدالة $g$ مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-0.38;-0.37]$ و $g(-0.38)g(-0.37)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0.38;-0.37[$ **0.5**

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة — التنقيط

4. استنتاج اشارة $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**0.25**

II) - $f$ دالة عددية معرفة على $R$ بـ:

$f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1. أ- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **0.25**

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **0.25**

ب- $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}$

$=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$ **0.25**

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**0.5**

2. أ- نبين أن

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ **0.25**

لدينا $f(x)-y=-xe^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty}[-xe^{-x}]=0$ **0.25**

وهـ م

ب- دراسة الوضعية : ندرش إشارة الفرق

$[f(x)-y]=-xe^{-x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الفرق | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C_f)$ فوق $(d)$ | ينطبق | $(C_f)$ تحت $(d)$ | |

**0.5**

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| 3. لدينا $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$ | |
| و لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه | |
| $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ | 0.25 |
| أي $e^{-\alpha}=\frac{-2}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد | |
| $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha\frac{-2}{\alpha-1}$ | |
| $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$ | |
| 4-الرسم. | 0.25<br>0.5 |
| $(c_f)$<br>$y=2x+1$<br>$y=2x+1-\frac{1}{e}$ | |

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| 5.المساحة: | |
| $s=\boxed{\int_0^2[(2x+1)-f(x)]\,dx}$ | |
| $s=\int_0^2 xe^{-x}\,dx$ | 0.25 |
| **تذكر:** $\int u\,v'\,dx=uv-\int u'v\,dx$ | |
| بالكاملة بالتجزئة نجد : | |
| $\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}-\int -e^{-x}\,dx$ | |
| $\boxed{=-xe^{-x}-e^{-x}+c}$ | |
| $\boxed{=-(x+1)e^{-x}+c}$ | |
| بالتعويض بالحدود نجد: | 0.25 |
| $s=[-(x+1)e^{-x}]_0^2\ ua$ | |
| **ومنه** $s=[-3e^{-2}+1]\ ua$ | |
| $s=\left[1-\frac{3}{e^2}\right]\ ua$ | |
| **تذكر: <u>وحدة المساحة</u>** | |
| $ua=2cm\times 2cm=4cm^2$ | |
| **ومنه** $s=\left[1-\frac{3}{e^2}\right]4\ cm^2$ | 0.25 |
| أي $\boxed{s=\left[4-\frac{12}{e^2}\right]\ cm^2}$ | |

| (الموضوع الثاني) عناصر الإجابة | التنقيط |
|---|---|
| III) – $(\Delta_m)$: $y=2x+m$ | |
| 1.$(\Delta_m)$ مماس للمنحني $(C_f)$يعني | |
| $f'(x)=2$ | 0.25 |
| ومنه $(x-1)e^{-x}+2=2$ | |
| أي أن $(x-1)e^{-x}=0$ | |
| ومنه $\boxed{x=1}$ | 0.25 |
| 2.كتابة معادلة للمماس$(\Delta_m)$ | |
| $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ | 0.25 |
| أي $\boxed{y=2x+1-\frac{1}{e}}$ | |
| 2. المناقشة البيانية | |
| $1-\frac{x}{e^x}-m=0$ | |
| يعني $1-xe^{-x}=m$ | |
| يعني $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ | |
| أي $\boxed{f(x)=2x+m}$ | 0.25 |
| لما $m<\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{e}$ لا توجد حلول . | 0.5 |
| لما $m=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{e}$ يوجد حل مضاعف موجب تماما هو 1 | |
| لما$\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{e}<m<\mathbf{1}$ يوجد حلين موجبين تماما | |
| لما $m=\mathbf{1}$ يوجد حلو وحيد معدوم. | |
| لما $m>\mathbf{1}$ يوجد حل وحيد سالب تماما. | |

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

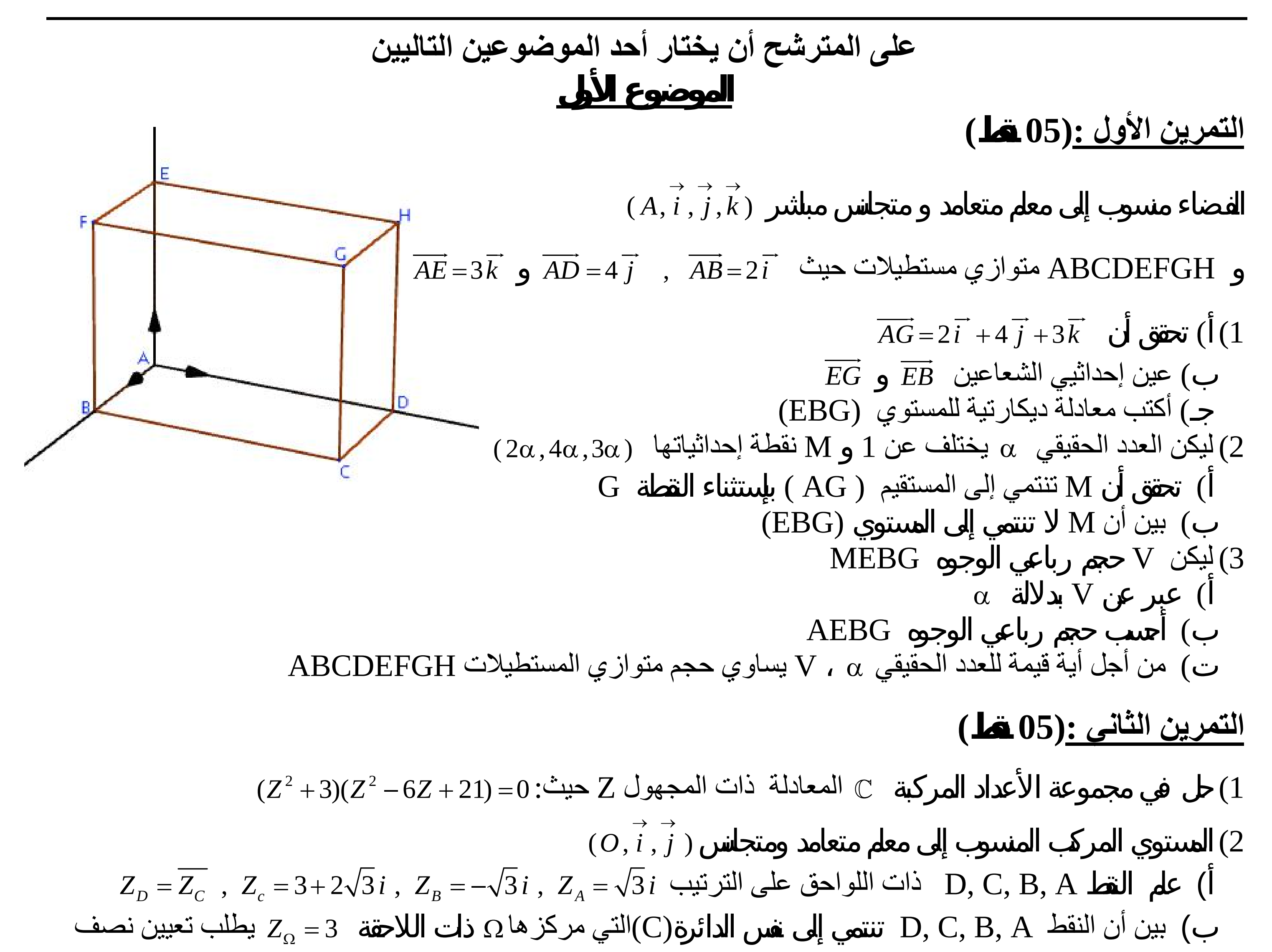
وزارة التربية الوطنية
ثانوية بلحاج قاسم نورالدين
بكالوريا تجـــــــريبي
دورة : ماي 2015
الشعبة : علوم تجريبية

إختبار في مادة : الرياضيات
المدة: 3سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (05 نقط)




الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

و ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ , $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$

1) أ) تحقق أن $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$

ب) عين إحداثيي الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$

جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (EBG)

2) ليكن العدد الحقيقي α يختلف عن 1 و M نقطة إحداثياتها $(2\alpha,4\alpha,3\alpha)$

أ) تحقق أن M تنتمي إلى المستقيم ( AG ) بإستثناء النقطة G

ب) بين أن M لا تنتمي إلى المستوي (EBG)

3) ليكن V حجم رباعي الوجوه MEBG

أ) عبر عن V بدلالة α

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه AEBG

ت) من أجل أية قيمة للعدد الحقيقي α ، V يساوي حجم متوازي المستطيلات ABCDEFGH

### التمرين الثاني: (05 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة ذات المجهول Z حيث: $(Z^2+3)(Z^2-6Z+21)=0$

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) علم النقط D, C, B, A ذات اللواحق على الترتيب $Z_A=\sqrt{3}i$ , $Z_B=-\sqrt{3}i$ , $Z_c=3+2\sqrt{3}i$ , $Z_D=\overline{Z_C}$

ب) بين أن النقط D, C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $Z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها

3) لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى O.

أ) بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عين طبيعة المثلث BEC

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $Z=3+2\sqrt{3}\,e^{i\theta}$ , $\theta\in R$

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه R ذو اللاحقة $Z_R=-3$ ونسبته 2.

أ) عين العبارة المركبة للتحاكي h.

ب) احسب مساحة صورة الدائرة ( C ) بالتحاكي h

## التمرين الثالث :(04 نقط)

1) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن اجل أي عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$

أ) احسب $u_1$ و $u_2$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<3$

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$

أ) بين ان $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

ب) اكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم $u_n$

ت) احسب نهاية المتتالية $(u_n)$

3) نعتبر المتتالية $(w_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\frac{3}{u_n}$

نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+.........+w_n$

أ) بين ان من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n=1-v_n$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $S_n=n+1+\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

ت) احسب نهاية $\frac{S_n}{n}$ لما يؤول $n$ الى $+\infty$

## التمرين الرابع:(06 نقط)

### الجزء الأول

لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$

1) أحسب نهايتي الدالة $g$ عند 0 و عند $+\infty$ .

2) بين أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ , $g'(x)=\frac{2x^2+3x+4}{x}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ .

### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$

نسمي $(\Gamma)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند 0 و عند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ , $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ , ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أدرس وضع المنحني $(\Gamma)$ بالنسبة للمستقيم $(D): y=x$ ثم أرسم $(D)$ و $(\Gamma)$.

4) أ) باستعمل التكامل بالتجزئة أحسب $\int_2^4 \ln(x)\,dx$

ب ) أحسب بالسنتيمتر مربع ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\Gamma)$ والمستقيم ( D ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول : (05 نقاط)**

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح ، عين الجواب الصحيح مع التعليل.

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقطتين A(1,-1,2) ، B(2;2;0 ) والمستوي (P) الذي معادلته $x+y-z-1=0$

1) المسافة بين النقطة $O$ و المستقيم (AB) هي :

ج1) $\frac{\sqrt{24}}{7}$ ج2) $\frac{2\sqrt{42}}{7}$ ج3) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

2) المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) هي :

ج1) A(1,1,-1) ج2) A(1,-1,1) ج3) A(1,1,1)

3) معادلة سطح الكرة التي مركزها O والمتماسة مع (P) هي :

ج1) $3x^2+3y^2+3z^2=1$ ج2) $x^2+y^2+z^2=2$ ج3) $x^2+y^2+z^2=1$

4) المستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (A B) ويشمل النقطة C(1,-2,3) له تمثيلا وسيطيا هو :

ج1) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t-\sim-1 \quad ;\sim\in R, t\in R \\ z=-2t+\sim+2 \end{cases}$ ج2) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-\sim-1 \;;\sim\in R, t\in R \\ z=t-\sim+2 \end{cases}$ ج3) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2\sim-1 \;;\sim\in R, t\in R \\ z=-t-\sim+2 \end{cases}$

5) المجموعة (E) للنقط M من الفضاء و التي تحقق $AM=BM$ لها المعادلة من الشكل :

ج1) $x-3y+2z-1=0$ ج2) $x+3y-2z-1=0$ ج3) $-x+3y-2z-1=0$

**التمرين الثاني : (04 نقاط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$ .

2) أكتب الحلول على الشكل المثلثي .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$

أ) عين $z_D$ لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع

ب) كتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$

ت) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي .

4) ليكن التحويل النقطي S الذي بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقط M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+3i$

أ) تعرف على طبيعة التحويل S و أعط عناصره المميزة

**ب)** بين أن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط M و التي تحقق $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=z_C.\overline{z_C}$ **هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها**

ت) عين المجموعة $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل S و أعط عناصره المميزة .

## التمرين الثالث : (05 نقاط )

لتكن المعادلة التفاضلية : $y'-3y=0 \cdots\cdots\cdots(1)$

1) حل في $\mathbb{R}$ التفاضلية $(1)$ ثم عيّن الحل الخاص $f$ الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=\frac{-2}{3}$ .

2) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها العام : $u_n=e^{3n+2}$

أ) بيّن أنّ $(u_n)$متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول , هل هي متقاربة ؟ .

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

3) نعرّف المتتالية $(v_n)$ بما يلي : $v_n=\ln(u_n)$

أ) بيّن أنّ $(v_n)$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

ب) أثبت أنّ $(v_n)$متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

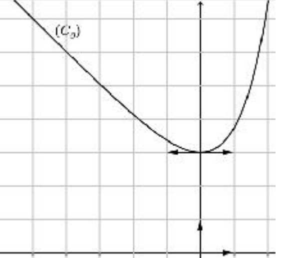
ت) أحسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n=u_0\times u_1\times u_2\times\text{..........}\times u_{n-1}$

## التمرين الرابع : (06 نقاط )

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

### الجزء الأول

في الشكل المقابل $(C_g)$ التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=ae^x+b-x$ حيث $a$ و b عددان حقيقيان




بقراءة بيانية

1) عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم عين $g(0)$ و $g'(0)$

2) عين إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها و إستنتج إشارة $g(x)$

3) أحسب $g'(x)$ بدلالة $a$ و b حيث g' هي الدالة المشتقة للدالة g .

4) بإستعمال المعطيات السابقة بين أن $g(x)=e^x+2-x$

### الجزء الثاني

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0<\alpha<\frac{1}{2}$ و إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أثبت أن المستقيم $(\Delta)$ ذو العادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ بجوار $+\infty$ ثم أدرس الأوضاع النسبية لهما .

5) بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

6) أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ الذي يوازي المستقيم $(\Delta)$.

7) أرسم $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$

8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $\frac{x-1}{e^x}=m \leftarrow \text{(E)}$

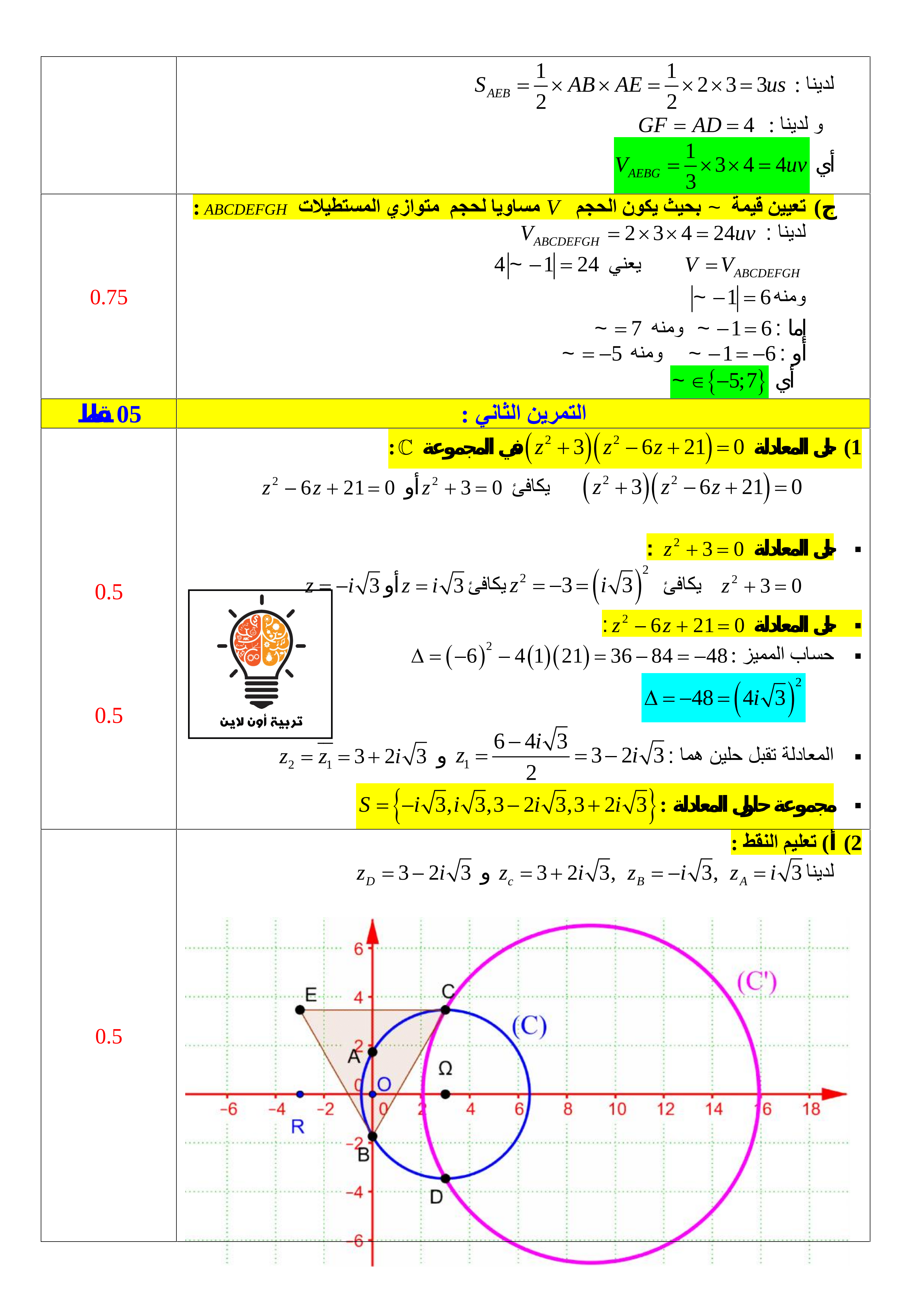
9) لتكن $A_a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y=x$ ، $x=1$ و $x=a$ حيث a عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

- بإستعمال المتكامل بالتجزئة احسب $\int_1^a (x-1)e^{-x}\,dx$ و إستنتج $A_a$ بدلالة a ثم احسب $\lim_{a\to+\infty} A_a$

## الموضوع الأول

| التصحيح | التنقيط |
|---|---|
| **التمرين الأول :** | **05 نقاط** |
| لدينا : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث ، $\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ | |
| 1) أ) **التحقق أن :** $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ **:**<br>لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ لان :<br>$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ | 0.5 |
| **ب) تعيين إحداثيي كل من الشعاعين** $\overrightarrow{EB}$ **و** $\overrightarrow{EG}$ **:**<br>لدينا : $\overrightarrow{EB}(2;0;-3)$ و $\overrightarrow{EG}(2;4;0)$ | $0.25+0.25$ |
| **ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي** $(EBG)$ **:**<br>**طريقة1**<br>لدينا : $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ شعاعي توجيه للمستوي $(EBG)$.<br>لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي $(EBG)$ يعني يوجد عددان حقيقيان ª , بحيث يكون :<br>$\overrightarrow{EM}=ª\overrightarrow{EB}+\quad\overrightarrow{EG}$ أي $\begin{cases}x=2ª+2\\y=4\\z-3=-3ª\end{cases}$<br>ومنه : $\begin{cases}x=2ª+2\\y=4\\z=-3ª+3\end{cases};(ª;\quad)\in\mathbb{R}^2$ هي جملة التمثيل الوسيطي للمستوي $(EBG)$.<br>من الجملة السابقة لدينا : $\begin{cases}3x+2z=3(2ª+2\quad)+2(-3ª+3)\\y=4\end{cases}$<br>ومنه : $\begin{cases}3x+2z=6\quad+6\\y=4\end{cases}$ أي $3x+2z=6\times\frac{y}{4}+6$ ومنه<br>$3x+2z-\frac{3}{2}y-6=0$ وبالتالي $6x-3y+4z-12=0$ معادلة للمستوي $(EBG)$<br>**طريقة2**<br>تعين $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظمي للمستوي $(EBG)$<br>لدينا $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}2a-3c=0\\2a+4b=0\\a=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\4b=-2\\3c=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}\\c=\frac{2}{3}\end{cases}$<br>إذن $x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z+d=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(EBG)$<br>بالتعويض عن إحداثيات النقطة B في المعادلة نجد $d=-2$<br>و منه $x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z-2=0$ أو $6x-3y+4z-12=0$ | 0.75 |

| | |
|---|---|
| | 2) لدينا : $\sim \in \mathbb{R}-\{1\}$ و $M(2\sim;4\sim;3\sim)$ |
| 0.5 | **أ) التحقق أن النقطة $M \in (AG)$ ماعدا النقطة $G$ :**<br>تمثيل وسيطي للمستقيم $(AG)$ : $\begin{cases} x=2t \\ y=4t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$<br>نعوض بإحداثيات النقطة $M$ في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases} 2\sim=2t \\ 4\sim=4t \\ 3\sim=3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\sim \\ t=\sim \\ t=\sim \end{cases}$<br>**أي $M$ تنتمي الى المستقيم $(AG)$ ماعدا النقطة $G$ لان $\sim \in \mathbb{R}-\{1\}$** |
| 0.25 | **ب) اثبات أن النقطة $M(2\sim;4\sim;3\sim)$ لاتنتمي الى المستوي $(EBG)$ :**<br>نعوض بإحداثيات النقطة $M(2\sim;4\sim;3\sim)$ في معادلة $(EBG)$ نجد :<br>$6(2\sim)-3(4\sim)+4(3\sim)-12=12\sim-12$ وبما أن $\sim\neq 1$<br>فإن $12\sim-12\neq 0$ ومنه $M\notin(EBG)$ |
| $4\times 0.25$ | **3) أ) التعبير عن الحجم $V$ بدلالة $\sim$ :**<br>لدينا : $V=\frac{1}{3}S_{(EBG)}\times h$<br>**حساب $S_{(EBG)}$ :**<br>لدينا : $S_{(EBG)}=\frac{1}{2}\times EB\times EG\times\sin\widehat{BEG}$<br>**حساب $\sin\widehat{BEG}$ :**<br>لدينا : $\cos\widehat{BEG}=\frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EG}}{EB\times EG}=\frac{4}{2\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$<br>ولدينا : $\sin^2\widehat{BEG}+\cos^2\widehat{BEG}=1$ ومنه $\sin^2\widehat{BEG}+\frac{4}{65}=1$<br>أي $\sin^2\widehat{BEG}=1-\frac{4}{65}=\frac{61}{65}$ وبالتالي $\sin\widehat{BEG}=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$<br>إذن : $S_{(EBG)}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{65}\times\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}=\sqrt{61}$ أي $S_{(EBG)}=\sqrt{61}\ us$<br>▪ **حساب $h$ :**<br>$h=d(M,(BEG))=\frac{\lvert 12\sim-12\rvert}{\sqrt{36+9+16}}=\frac{12\lvert\sim-1\rvert}{\sqrt{61}}$<br>إذن : $V=\frac{1}{3}\sqrt{61}\times\frac{12\lvert\sim-1\rvert}{\sqrt{61}}=4\lvert\sim-1\rvert$<br>أي $V=4\lvert\sim-1\rvert\ uv$ |
| 0.75 | **ب) حساب حجم رباعي الوجوه $AEBG$ :**<br>$V_{AEBG}=\frac{1}{3}S_{AEB}\times GF$ |

| | |
|---|---|
| | لدينا : $S_{AEB}=\frac{1}{2}\times AB\times AE=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3us$<br>و لدينا : $GF=AD=4$<br>أي $V_{AEBG}=\frac{1}{3}\times 3\times 4=4uv$ |
| 0.75 | **ج) تعيين قيمة $\sim$ بحيث يكون الحجم $V$ مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ :**<br>لدينا : $V_{ABCDEFGH}=2\times 3\times 4=24uv$<br>$V=V_{ABCDEFGH}$ يعني $4\left\|\sim -1\right\|=24$<br>ومنه $\left\|\sim -1\right\|=6$<br>إما : $\sim -1=6$ ومنه $\sim =7$<br>أو : $\sim -1=-6$ ومنه $\sim =-5$<br>أي $\sim \in\{-5;7\}$ |
| **05 نقاط** | **التمرين الثاني :** |
| 0.5<br><br>0.5 | **1) حل المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$:**<br>$(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ يكافئ $z^2+3=0$ أو $z^2-6z+21=0$<br>▪ **حل المعادلة $z^2+3=0$ :**<br>$z^2+3=0$ يكافئ $z^2=-3=(i\sqrt{3})^2$ يكافئ $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$<br>▪ **حل المعادلة $z^2-6z+21=0$:**<br>▪ حساب المميز : $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=36-84=-48$<br>$\Delta=-48=(4i\sqrt{3})^2$<br>▪ المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{6-4i\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=3+2i\sqrt{3}$<br>▪ **مجموعة حلول المعادلة :** $S=\{-i\sqrt{3},i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3},3+2i\sqrt{3}\}$ |
| 0.5 | **2) أ) تعليم النقط :**<br>لدينا $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=-i\sqrt{3}$, $z_c=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=3-2i\sqrt{3}$<br> |

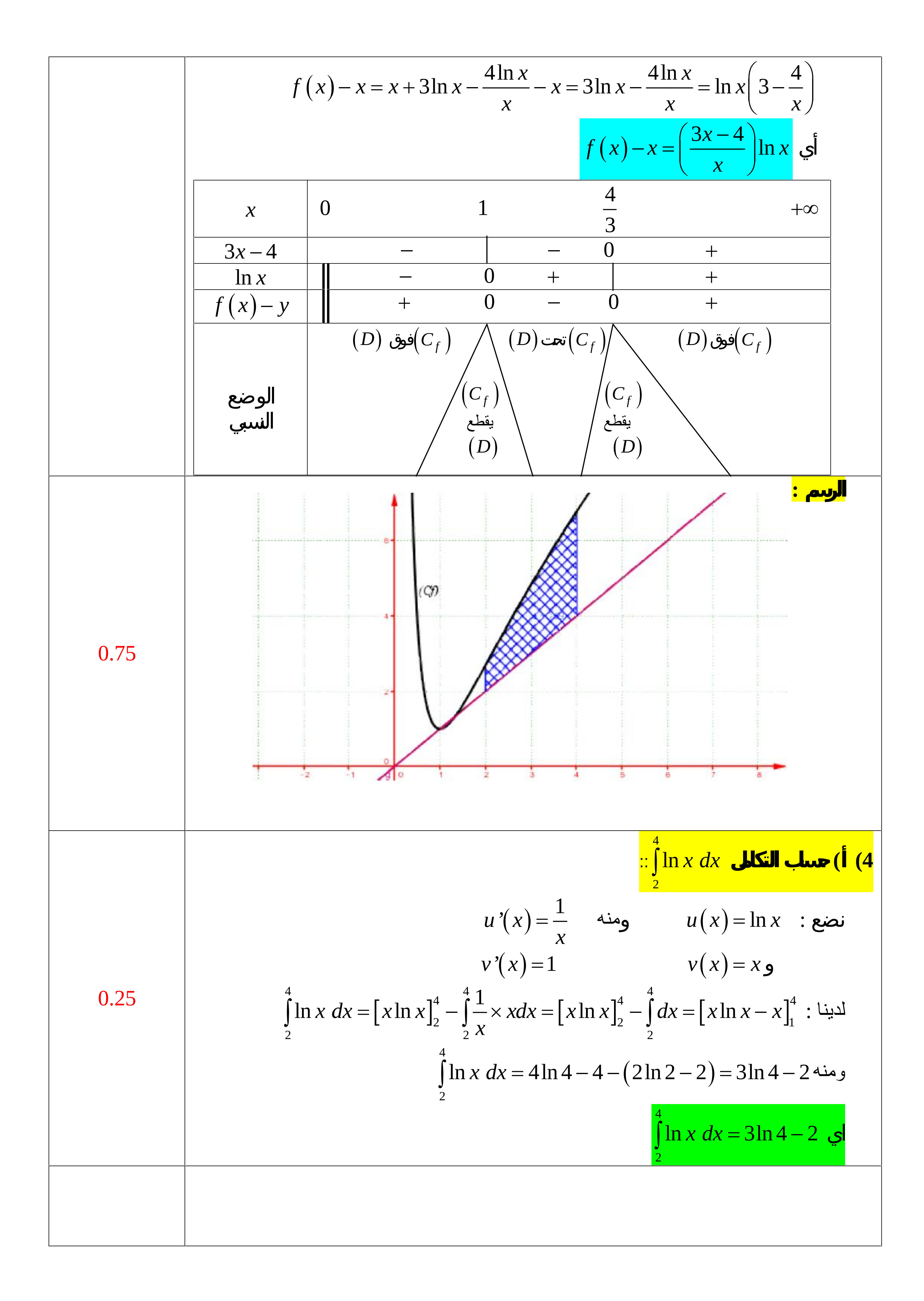
| | |
|---|---|
| | |
| 0.5 | ب) تبيان أن النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$ :<br>لدينا : $\Omega A=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|i\sqrt{3}-3\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>$\Omega B=\left|z_B-z_\Omega\right|=\left|-i\sqrt{3}-3\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>$\Omega C=\left|z_C-z_\Omega\right|=\left|3+2i\sqrt{3}-3\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>$\Omega D=\left|z_D-z_\Omega\right|=\left|3-2i\sqrt{3}-3\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$<br>ومنه النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$ |
| 0.25 | 3) لدينا النقطة $E$ هي نظيرة النقطة $D$ بالنسبة الى المبدأ $O$ :<br>أي $z_E=-3+2i\sqrt{3}$ |
| 0.5 | أ) اثبات أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{®}{3}}$ :<br>أي $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$<br>$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$<br>ومنه $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{2}{4}-i\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{®}{3}}$ |
| 0.25 | ▪ استنتاج طبيعة المثلث $BEC$ :<br>لدينا : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{®}{3}}$ يعني $\frac{BC}{BE}=1$ ومنه $BC=BE$ و $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{®}{3}$<br>أي أن المثلث $BEC$ متقايس الأضلاع |
| 0.5 | أ) عين طبيعة $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوى ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق : $z=3+2\sqrt{3}e^{i}$<br>▪ لدينا : $z=3+2\sqrt{3}e^{i}$ يعني $z-3=2\sqrt{3}e^{i}$<br>ومنه $\left\|z-3\right\|=2\sqrt{3}$ أي $\Omega M=2\sqrt{3}$<br>وبالتالي المجموعة المطلوبة $(E)$ هي الدائرة $(C)$ ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$ |
| 0.5 | ب) تعيين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$ :<br>لدينا : $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$ يعني $\Omega M=2\sqrt{3}$<br>ومنه مجموعة النقط هي الدائرة $(C)$ ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$ ونصف القطر $r=2\sqrt{3}$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | 4) ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $R(z_R=-3)$ ونسبته $k=2$.<br>**أ) كتابة العبارة المركبة للتحاكي $h$:**<br>لدينا: $h(M)=M'$ يعني $z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$<br>أي $z'+3=2(z+3)$<br>**ومنه العبارة المركبة للتحاكي $h$: $z'=2z+3$** |
| 0.5 | **ب) حسب مساحة الدائرة $(C')$ صورة الدائرة $(C)$ بالتحاكي $h$:**<br>**مساحة الدائرة $(C)$:**<br>$S_{(C)}=\pi r^2=\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2=12\pi\ uA$<br>**مساحة الدائرة $(C')$:**<br>$S_{(C')}=\pi(2r)^2=4S_{(C)}=48\pi\ uA$ |
| **04 نقاط** | **التمرين الثالث** |
| | **1)** لدينا: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$ |
| $0.25+0.25$ | **أ) حسب الحدين $u_2,u_1$:**<br>$u_1=\dfrac{4u_0}{1+u_0}=\dfrac{4}{2}=2$ ، $u_2=\dfrac{4u_1}{1+u_1}=\dfrac{4\times 2}{1+2}=\dfrac{8}{3}$ |
| 0.75 | **ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0<u_n<3$:**<br>نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.<br>-1 من أجل $n=0$ لدينا :<br>$u_0=1$ و $0<1<3$ و منه $P(n)$ محققة من أجل $n=0$.<br>-2 نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $0<u_n<3$ من أجل كل عدد طبيعي $n$<br>ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<3$ من أجل كل عدد طبيعي $n$<br>لدينا: $0<u_n<3$ ومنه $0<4u_n<12$ ومنه $1<1+u_n<4$ ومنه $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{1+u_n}<1$<br>ولدينا: $\dfrac{4u_n}{1+u_n}=4-\dfrac{4}{1+u_n}$<br>إذن: $-4<-\dfrac{4}{1+u_n}<-1$ وبالتالي $4-4<4-\dfrac{4}{1+u_n}<4-1$<br>ومنه: $0<u_{n+1}<3$ أي $P(n+1)$ صحيحة.<br>-3 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0<u_n<3$ |
| | **2) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا:** $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$ |
| 0.75 | **أ) تبيان أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$:**<br>**لدينا:** $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}$ ومنه |

| | |
|---|---|
| | $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{4u_n}{1+u_n}-3}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}}=\dfrac{\dfrac{4u_n-3-3u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}}=\dfrac{u_n-3}{4u_n}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u_n-3}{u_n}$<br>أي $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$<br>ومنه $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0}=\dfrac{1-3}{1}=-2$ |
| 0.25 | **ب) كتابة عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ :**<br>$v_n=v_0q^n=-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ |
| 0.5 | ▪ **لستنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ :**<br>$v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$ يعني $v_nu_n=u_n-3$<br>ومنه $u_n=\dfrac{3}{1-v_n}=\dfrac{3}{1+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$ |
| 0.25 | **ج) حسب نهاية المتتالية $(u_n)$:**<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{1+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}=3$ لان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ |
| | **3)** لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$، $w_n=\dfrac{3}{u_n}$ و $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$ |
| 0.25 | **أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $w_n=1-v_n$ :**<br>لدينا : $1-v_n=1-\dfrac{u_n-3}{u_n}=\dfrac{u_n-u_n+3}{u_n}=\dfrac{3}{u_n}=w_n$<br>أي $w_n=1-v_n$ |
| 0.5 | **ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $S_n=n+1+\dfrac{8}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$:**<br>لدينا :<br>$S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n=1-v_0+1-v_1+\ldots+1-v_n=1\times(n+1)-(v_0+v_1+\ldots+v_n)$<br>أي $S_n=n+1-v_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=n+1-(-2)\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{4}}\right)$ |

| | |
|---|---|
| | ومنه $S_n = n+1+2\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right) = n+1+\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ |
| 0.25 | **ج) حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$ : <br> $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{8}{3n}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right] = 1$ |
| **06 نقاط** | **التمرين الرابع** |
| | **الجزء الأول :** لدينا $g(x) = x^2+3x-4+4\ln x$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ |
| $2\times 0.25$ | **1) حساب نهايتي الدالة** $g$ : <br> $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+3x-4+4\ln x\right) = -\infty$ لان $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ <br> $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x-4+4\ln x\right) = +\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x-4\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty\end{cases}$ |
| 0.25 | **2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ **من المجال** $]0;+\infty[$ **،** $g'(x) = \dfrac{2x^2+3x+4}{x}$ : <br> لدينا : $g'(x) = 2x+3+\dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2+3x+4}{x}$ |
| $0.25+0.25$ | **استنتاج اتجاه تغير الدالة** $g$ : <br> $g'(x) = 0$ يعني $2x^2+3x+4 = 0$ و $x\in\,]0;+\infty[$ <br> حساب المميز : $\Delta = (3)^2-4(2)(4) = -23 < 0$ <br> المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ . <br> **جدول إشارة المشتقة**: إشارة المشتقة من نفس إشارة $2x^2+3x+4$ <br> <table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$\Vert$ $\qquad$ $+$</td></tr></table> |
| 0.5 | **جدول تغيرات الدالة** $g$ : <br> <table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\qquad$ $1$ $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$\Vert$ $\qquad$ $+$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$\Vert$ $-\infty$ ↗ **0** ↗ $+\infty$</td></tr></table> |

| | |
|---|---|
| $0.25+0.25$ | **حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ :**<br>لدينا : $g(1)=1^2+3\times1-4+4\ln1=4-4=0$<br>جدول لشارة $g(x)$ :<br><table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\quad$ $1$ $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>‖ $\quad -\quad 0 \quad + $</td></tr></table> |
| | **الجزء الثاني :** لدينا : $f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ |
| $0.25$ | **1) حساب نهايتي الدالة $f$ :**<br>$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(x^2+3x\ln x-4\ln x\right)=+\infty$ |
| $0.25$ | لان : $\begin{cases}\lim_{x\to0^+} x\ln x=0\\ \lim_{x\to0^+}(-4\ln x)=+\infty\end{cases}$<br>$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}\right)=+\infty$ لان $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} 3\ln x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right)=0\end{cases}$ |
| $0.25$ | **2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ :**<br>لدينا : $f'(x)=1+\frac{3}{x}-4\times\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$<br>أي $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ |
| $0.25$ | **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**<br>إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$<br><table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\quad$ $1$ $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>‖ $\quad -\quad 0 \quad + $</td></tr></table> |
| $0.5$ | **جدول تغيرات الدالة $f$ :**<br><table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\quad$ $1$ $\quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>‖ $\quad -\quad 0 \quad + $</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>‖ $+\infty$ ↘ $1$ ↗ $+\infty$</td></tr></table> |
| $0.75$ | **3) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(D): y=x$ :**<br>ندرس لشارة الفرق $f(x)-x$ : |



$$f(x)-x=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}-x=3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=\ln x\left(3-\frac{4}{x}\right)$$

أي $f(x)-x=\left(\frac{3x-4}{x}\right)\ln x$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-4$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ فوق $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(D)$ | $(C_f)$ تحت $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(D)$ | $(C_f)$ فوق $(D)$ | |

**الرسم :** 0.75



**4) أ) حساب التكامل** $\int_2^4 \ln x\,dx$ : 0.25

نضع : $u(x)=\ln x$ ومنه $u'(x)=\frac{1}{x}$

و $v(x)=x$ $v'(x)=1$

لدينا : $\int_2^4 \ln x\,dx=[x\ln x]_2^4-\int_2^4 \frac{1}{x}\times x dx=[x\ln x]_2^4-\int_2^4 dx=[x\ln x-x]_1^4$

ومنه $\int_2^4 \ln x\,dx=4\ln 4-4-(2\ln 2-2)=3\ln 4-2$

أي $\int_2^4 \ln x\,dx=3\ln 4-2$

| | |
|---|---|
| 0.5 | ب ) **حسب بـ** $cm^2$ **المساحة** $A$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\Gamma)$ والمستقيم ( D )<br>و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$ و $x = 4$<br>$A=\int_2^4 (f(x)-x)dx=\int_2^4\left(3\ln x-\frac{4\ln x}{x}\right)dx$<br>أي $A=\int_2^4 (f(x)-x)dx=\int_2^4(3\ln x)dx-\int_2^4\frac{4\ln x}{x}dx$<br>ومنه $A=3(3\ln 4-2)-\left[2(\ln x)^2\right]_2^4=9\ln 4-6-2(\ln 4)^2+2(\ln 2)^2$<br>**وبالتالي** : $A=\left[-2(\ln 4)^2+2(\ln 2)^2+9\ln 4-6\right]\times 9\ cm^2$ أي $A=32.3\ cm^2$ |





## تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة علوم تجريبية

## الموضوع الثاني

| التصحيح | العلامة |
|---|---|
| **التمرين الأول:** | |
| **لدينا :** نعتبر النقطتين $A(1;-1;2)$ ، $B(2;2;0)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته $x+y-z-1=0$ | |
| **1) المسافة بين النقطة $O$ و المستقيم $(AB)$ هي :**<br>- **تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم :**<br>شعاع توجيه المستقيم $(AB)$ هو $\overrightarrow{AB}(1;3;-2)$<br>إذن: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t-1 \\ z=-2t+2 \end{cases} ; (t\in\mathbb{R})$<br>- **تعيين إحداثيات النقطة $O'$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستقيم $(AB)$:**<br>لدينا : $O'(t+1;3t-1;-2t+2)$<br>ومنه $\overrightarrow{OO'}(t+1;3t-1;-2t+2)$<br>ولدينا : $\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{AB}=0$ ومنه $1\times(t+1)+3\times(3t-1)-2\times(-2t+2)=0$<br>أي $14t-6=0$<br>ومنه $t=\frac{3}{7}$ وبالتالي $O'\left(\frac{10}{7};\frac{2}{7};\frac{8}{7}\right)$<br>- **حساب المسافة $d(O,(AB))=OO'$:**<br>$d(O,(AB))=OO'=\sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{8}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{42}}{7}$<br>☜ الاجابة الصحيحة ج2 | 0.75<br>0.25 |
| **2) المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P)$ هي :**<br>- التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المار من النقطة $B$ والعمودي على المستوي $(P)$<br>$\begin{cases} x=2+t \\ y=2+t; \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$<br>- المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P)$ هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(P)$ يعني حل الجملة<br>- لدينا : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases} \\ x+y-z=1 \end{cases}$ ومنه $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases} \\ 2+t+2+t+t=1 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \\ t=-1 \end{cases}$<br>ومنه $A(1;1;1)$ الإجابة الصحيحة ج 3 | 0.75<br>0.25 |
| **3) معادلة سطح الكرة التي مركزها $O$ والمتماسة مع $(P)$ هي :**<br>- حساب المسافة بين $O$ مع المستوي $(P)$: $d(O,(P))=\frac{\lvert 0+0+0-1\rvert}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0.75 |

| | |
|---|---|
| 0.25 | معادلة سطح الكرة التي تمس $(P)$ ومركزها $O$ هي : $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$<br>**الاجابة الصحيحة هي ج1** |
| 0.75<br><br>0.25 | **4) المستوي $(Q)$ الذي يحوي المستقيم $(AB)$ ويشمل النقطة $C(1;-2;3)$ له تمثيلا وسيطيا هو :**<br>- هو المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AB}(1;3;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-1;1)$ شعاعي توجيه له ,<br>- من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء يوجد عددان حقيقيان $t,\lambda$ بحيث يكون :<br>$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ أي $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t-\lambda-1 \\ z=-2t+\lambda+2 \end{cases}$ ; $(t;\lambda)\in\mathbb{R}^2$<br>**الاجابة الصحيحة هي : ج1** |
| 0.75<br><br>0.25 | **5) المجموعة $(E)$ للنقط من الفضاء التي تحقق $AM=BM$ لها معادلة من الشكل :**<br>- المجموعة $(E)$ هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$<br>الشعاع $\overrightarrow{AB}(1;3;-2)$ ناظمي له .<br>ولتكن النقطة $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right)$ منتصف القطعة $[AB]$ تحقق المعادلة $x+3y-2z-1=0$<br>لان $\frac{3}{2}+3\times\frac{1}{2}-2\times1-1=0$ إذن : $(E):x+3y-2z-1=0$<br>**الاجابة الصحيحة هي ج 2** |
| | **التمرين الثاني :** |
| 0.25<br><br>0.25+0.25 | **1) حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$**<br>- حسب المميز : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times4=12-16=-4=(2i)^2$<br>- المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i,\ z_2=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$<br>مجموعة الحلول $S=\left\{\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}+i\right\}$ |
| 0.25 | **2) كتابة الحلول على الشكل المثلثي:**<br>- لدينا : $z_1=\sqrt{3}+i$<br>حساب الطويلة : $\lvert z_1\rvert=\lvert\sqrt{3}+i\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$<br>تعيين عمدة للعدد $z_1=\sqrt{3}+i$ :<br>نضع $\theta_1=\arg(z_1)$ لدينا $\begin{cases} \cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1=\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$<br>أي $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ |

| | |
|---|---|
| - كتابة $z_2=\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي :<br>$z_2=\overline{z_1}=2\left(\cos\left(-\frac{®}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{6}\right)\right)$ | 0.25 |
| 3) لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i,\ z_B=\sqrt{3}-i,\ z_C=-\sqrt{3}-i$ | |
| أ) تعيين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :<br>$ABCD$ متوازي أضلاع يعني $z_{\overrightarrow{AD}}=z_{\overrightarrow{BC}}$<br>أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه<br>$z_D=z_C-z_B+z_A=-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+i=-\sqrt{3}+i$<br>أي $z_D=-\sqrt{3}+i$ | 0.5 |
| ب) كتابة الأعداد $z_A,\ z_B,\ z_C$ على الشكل الأسي :<br>- لدينا :<br>$z_A=2e^{i\frac{®}{6}},\ z_B=2e^{-i\frac{®}{6}}$<br>ولدينا : $z_C=-z_A=-2e^{i\frac{®}{6}}=2e^{i®}\times e^{i\frac{®}{6}}=2e^{i\frac{7®}{6}}$ أي $z_C=2e^{i\frac{7®}{6}}$ | 0.25<br>0.25 |
| ج) تعيين العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقيا :<br>- لدينا : $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=\left(\frac{2e^{i\frac{®}{6}}}{2}\right)^n\times\left(\frac{2e^{-i\frac{®}{6}}}{2}\right)^n\times\left(\frac{2e^{i\frac{7®}{6}}}{2}\right)^n$<br>أي $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=e^{i\frac{n®}{6}}\times e^{-i\frac{n®}{6}}\times e^{i\frac{7n®}{6}}=e^{i\frac{7n®}{6}}$<br>$\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي يعني $\sin\frac{7n®}{6}=0$<br>ومنه $\frac{7n®}{6}=k®$ أي $7n®=6k®$ إذن $7n=6k$ مع $k=7\sim$<br>وبالتالي $n=6\sim$ مع $\sim\in\mathbb{N}$ | 0.25<br>0.25 |
| 4) لدينا العبارة المركبة للتحويل $S$ من الشكل : $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}+3i$ | |
| أ) تعيين طبيعة التحويل $S$ وعناصره المميزة :<br>لدينا $S$ من الشكل : $z'=az+b$ حيث $a=1-i\sqrt{3}\ ,\ b=-\sqrt{3}+3i$<br>إذن : $\lvert a\rvert=\lvert 1-i\sqrt{3}\rvert=2$ ومنه $S$ تشابه مستوي مباشر نسبته $\lvert a\rvert=2$<br>وزاويته $\text{–}=\arg(a)=\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\frac{®}{3}$ لان $\begin{cases}\cos\text{–}=\frac{1}{2}\\ \sin\text{–}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$<br>ومركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{1-1+i\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{i\sqrt{3}}\times\frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}=\sqrt{3}+i$<br>أي $z_\Omega=\sqrt{3}+i=z_A$ | 0.25<br>0.25 |

| | |
|---|---|
| | مركز التشابه هو النقطة $A(\sqrt{3}+i)$ |
| 0.5 | **ب) تعيين طبيعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=z_C\overline{z_C}$**<br>- **لدينا :** $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=\lvert z-z_A\rvert^2$ و $z_C\overline{z_C}=\lvert z_C\rvert^2=4$<br>$(z-z_A)(\overline{z-z_A})=z_C\overline{z_C}$ يكافئ $\lvert z-z_A\rvert^2=4$<br>ومنه $\lvert z-z_A\rvert=2$ أي $AM=2$<br>وبالتالي المجموعة $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها $A(\sqrt{3}+i)$ ونصف قطرها $r=2$ |
| 0.25 | **ج) تعيين $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $S$:**<br>$(\Gamma')$ هي دائرة مركزها $A(\sqrt{3}+i)$ لان $S(A)=A$ ونصف قطرها $r'=2r=2\times2=4$ |
| | **الرسم:**<br> |
| | **التمرين الثالث :** |
| | لدينا : $(1): y'-3y=0$ |
| 0.5 | **1) حل المعادلة التفاضلية $(1)$:**<br>- لدينا : $y'-3y=0$ يكافئ $y'=3y$<br>حلول المعادلة هي الدوال $f$ من الشكل : $f(x)=ce^{3x}$ حيث $c\in\mathbb{R}$ |
| 0.25 | - **تعيين الحل الخاص $f$ الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right)=1$ :**<br>$f\left(-\frac{2}{3}\right)=1$ يعني $ce^{3\left(-\frac{2}{3}\right)}=1$ ومنه $ce^{-2}=1$ أي $c=e^2$<br>ومنه $f(x)=e^2\times e^{3x}=e^{3x+2}$ |
| | **2) لدينا :** $u_n=e^{3n+2}$ |
| 0.5<br>+<br>0.25<br>+<br>0.25 | **أ) تبيان أن المتتالية $(u_n)$ هندسية :**<br>- لدينا : $u_{n+1}=e^{3(n+1)+2}=e^{3n+3+2}=e^3\times e^{3n+2}=e^3\times u_n$<br>**ومنه المتتالية $(u_n)$ هندسية أساسها $q=e^3$ وحدها الأول $u_0=e^2$** |
| 0.25 | - **تقارب المتتالية $(u_n)$ :** $(u_n)$ هندسية أساسها $q=e^3$ أي $q>1$ ومنه $(u_n)$ متباعدة |

| | |
|---|---|
| | لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{3n+2} = +\infty$ |
| 0.5 | **ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ :**<br>- لدينا : $u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = (e^3 - 1)e^{3n+2}$<br>بما أن $e^3 - 1 > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما . |
| | **3) لدينا :** $v_n = \ln(u_n)$ |
| 0.5 | **أ) تبيان أن المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ :**<br>من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $u_n > 0$ ومنه المتتالية $(v_n)$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$.<br>**ولدينا :** $v_n = \ln e^{3n+2} = 3n + 2$ |
| 0.25+0.5<br>0.25+ | **ب) تبيان أن المتتالية $(v_n)$ حسابية :**<br>- لدينا : $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$ ومنه $(v_n)$ حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول<br>$v_0 = 2$ |
| 0.5 | **ج) حساب المجموع $S_n$:**<br>$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1) + 2)$<br>أي $S_n = \frac{n}{2}(3n+1)$ |
| 0.5 | - **حساب الجداء** $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$:<br>$T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times ... \times e^{v_{n-1}} = e^{v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}}$<br>أي $T_n = e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$ |
| | **التمرين الرابع :** |
| | **الجزء الأول:** |
| | لدينا : $g(x) = ae^x + b - x$ معرفة على $D_g = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ |
| 0.25<br><br>0.25 | **1) تعيين نهايتي الدالة $g$:**<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$<br>- **تعيين $g(0)$ و $g'(0)$ :**<br>$g(0) = 3$ و $g'(0) = 0$ |
| 0.25<br><br>0.25 | **2) تعيين اتجاه تغير الدالة $g$:**<br>الدالة $g$ متناقصة على المجل $]-\infty; 0]$ ومتزايدة على المجال $[0; +\infty[$.<br>**جدول تغيرات الدالة $g$:**<br>$x$: $-\infty$ … $0$ … $+\infty$<br>$g'(x)$: $-$ … $0$ … $+$<br>$g(x)$: $+\infty$ ↘ $3$ ↗ $+\infty$ |
| 0.25 | - **استنتاج إشارة $g(x)$:**<br>$x$: $-\infty$ … $+\infty$<br>$g(x)$: $+$ |

| | |
|---|---|
| | |
| 0.25 | 3) حساب $g'(x)$ بدلالة كلا من $a$ و $b$: <br> - لدينا: $g'(x)=ae^{x}-1$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ |
| 0.25 <br><br> 0.25 | 4) تبيان أن $g(x)=e^{x}+2-x$: <br> لدينا : $\begin{cases} g(0)=3 \\ g'(0)=0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} ae^{0}+b=3 \\ ae^{0}-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a+b=3 \\ a=1 \end{cases}$ <br> أي $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ <br> وبالتالي: $g(x)=e^{x}+2-x$ |
| | **الجزء الثاني** |
| | **لدينا :** $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ |
| 0.25 <br><br> 0.25 | 1) **حساب** $\lim_{x\to-\infty} f(x);\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ : <br> $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}\right]=-\infty$ <br> لان $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}=-\infty$ <br> و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x-1}{e^{x}}\right)=+\infty$ <br> لان : $\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ |
| 0.25 <br><br> 0.25 | 2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ : <br> لدينا : $f'(x)=1+\left(e^{-x}+(x-1)\left(-e^{-x}\right)\right)=1+e^{-x}(1-x+1)=e^{-x}\left(e^{x}+2-x\right)$ <br> ومنه $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$ <br> - استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ : <br> إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لان $e^{-x}>0$ <br><br> $x$: $-\infty$ ... $+\infty$ <br> $f'(x)$: $+$ |
| 0.25 | - جدول تغيرات الدالة $f$ : <br><br> $x$: $-\infty$ ... $+\infty$ <br> $f'(x)$: $+$ <br> $f(x)$: $-\infty$ ↗ $0$ ↗ $+\infty$ |

**3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث $0<\sim<\frac{1}{2}$:**

الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ ولدينا : $f(0)=-1$ و

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\right)$$ أي $$f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

0.25

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث $0<\sim<\frac{1}{2}$

0.25

---

**4) تبيان ان المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$:**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}-e^{-x}\right)=0$$

0.25

لان $$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0\\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\end{cases}$$

---

**- دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$:**

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=x+(x-1)e^{-x}-x=(x-1)e^{-x}$

| $x$ | $-\infty$      $1$      $+\infty$ |
|---|---|
| $(x-1)e^{-x}$ | $-$    $0$    $+$ |
| $f(x)-y$ | $-$    $0$    $+$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$    $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$    $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

0.25

0.25

---

**5) تبيان أن المنحنى** $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف :

لدينا: $1+(2-x)e^{-x}=1$

أي $f''(x)=e^{-x}\left(e^{x}-1-e^{x}-2+x\right)=e^{-x}(x-3)$

| $x$ | $-\infty$      $3$      $+\infty$ |
|---|---|
| $f''(x)$ | $-$    $0$    $+$ |

0.25

لدينا $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=3$ مغيرة إشارتها ومنه النقطة $A\left(3;3+\frac{2}{e^{3}}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

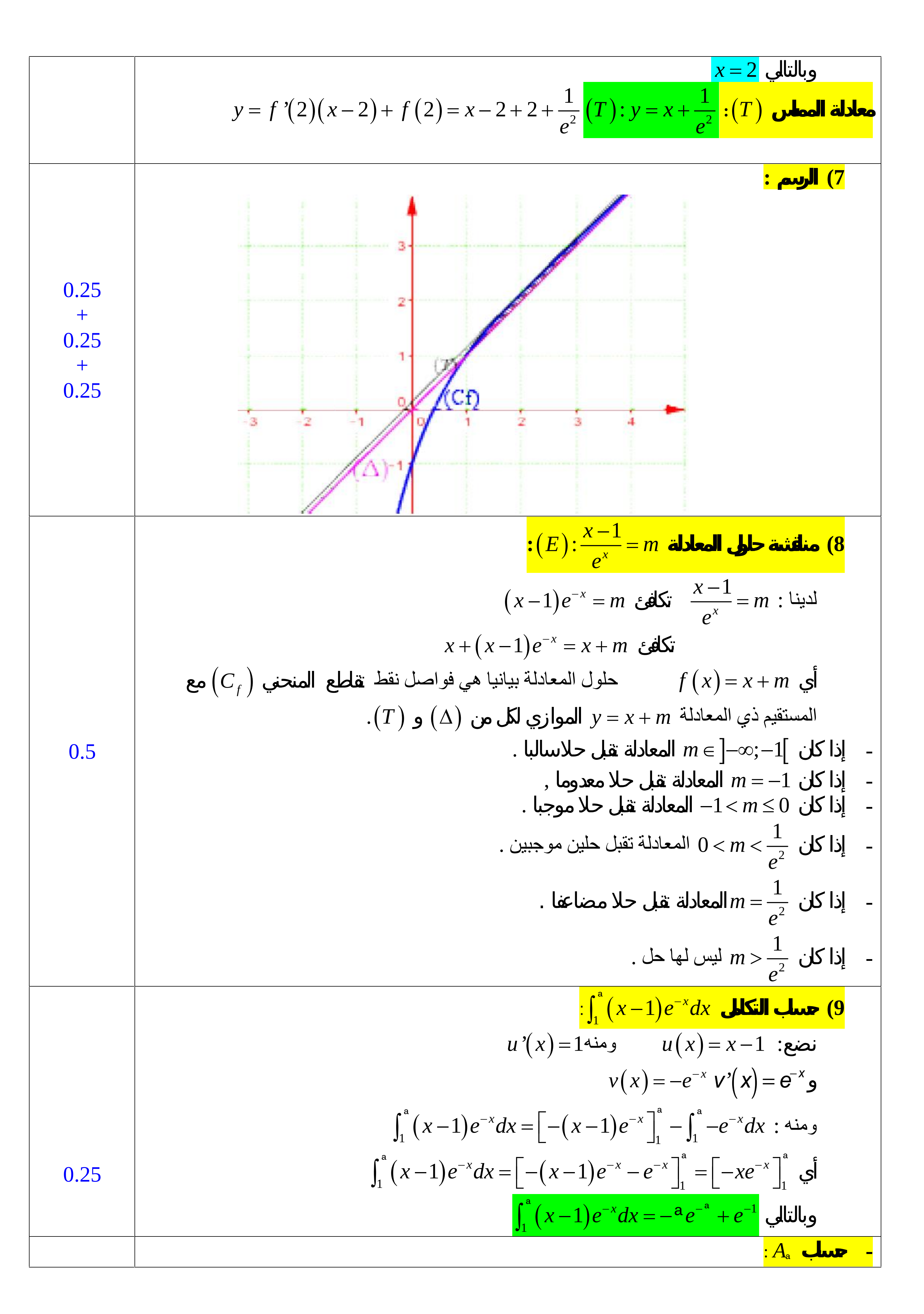
---

**6) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ الموازي للمستقيم $(\Delta)$:**

$(T)\parallel(\Delta)$ يعني معامل توجيه المماس $(T)$ يساوي $1$ أي $f'(x_0)=1$

0.25

ومنه $1+(2-x)e^{-x}=1$ أي $(2-x)e^{-x}=0$

| | |
|---|---|
| | وبالتالي $x=2$<br>**معادلة المماس** $(T)$ : $(T): y = x + \frac{1}{e^2}$ $y = f'(2)(x-2) + f(2) = x - 2 + 2 + \frac{1}{e^2}$ |
| 0.25<br>+<br>0.25<br>+<br>0.25 | 7) **الرسم :**<br><br> |
| 0.5 | 8) **مناقشة حلول المعادلة** $(E): \frac{x-1}{e^x} = m$ :<br>لدينا : $\frac{x-1}{e^x} = m$ تكافئ $(x-1)e^{-x} = m$<br>تكافئ $x + (x-1)e^{-x} = x + m$<br>أي $f(x) = x + m$ حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من $(\Delta)$ و $(T)$.<br>- إذا كان $m \in ]-\infty;-1[$ المعادلة تقبل حلاسالبا .<br>- إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا معدوما ,<br>- إذا كان $-1 < m \leq 0$ المعادلة تقبل حلا موجبا .<br>- إذا كان $0 < m < \frac{1}{e^2}$ المعادلة تقبل حلين موجبين .<br>- إذا كان $m = \frac{1}{e^2}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .<br>- إذا كان $m > \frac{1}{e^2}$ ليس لها حل . |
| 0.25 | 9) **حساب التكامل** $\int_1^a (x-1)e^{-x}dx$ :<br>نضع: $u(x) = x-1$ ومنه $u'(x) = 1$<br>و $v'(x) = e^{-x}$ $v(x) = -e^{-x}$<br>ومنه : $\int_1^a (x-1)e^{-x}dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^a - \int_1^a -e^{-x}dx$<br>أي $\int_1^a (x-1)e^{-x}dx = \left[-(x-1)e^{-x} - e^{-x}\right]_1^a = \left[-xe^{-x}\right]_1^a$<br>وبالتالي $\int_1^a (x-1)e^{-x}dx = -ae^{-a} + e^{-1}$ |
| | - **حساب** $A_a$ : |

| | |
|---|---|
| 0.25<br><br><br><br>0.25 | $A_a = \int_1^a \left[ f(x) - x \right] dx = \int_1^a (x-1) e^{-x} dx$<br>أي $A_l = \left( -l\, e^{-l} + e^{-1} \right) U.A$<br><br>- حسب $\lim\limits_{a \to +\infty} A_a$ :<br>$\lim\limits_{l \to +\infty} A_l = e^{-1}\, U.A$ $\lim\limits_{l \to +\infty} A_l = \lim\limits_{l \to +\infty} \left( -l\, e^{-l} + e^{-1} \right) = e^{-1}\, U.A$ |

**انتهى تصحيح الموضوع الثاني ✌ بالتوفيق والنجاح ☺**





الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　مديرية التربية لولاية الشلف　　ثانوية بلحاج قاسم نورالدين

امتحان البكالوريا التجريبي　　دورة : ماي 2014

**الشعبة : رياضيات**

---

**اختبار في مادة الرياضيات**　　**المدة : 4ساعات ونصف**

---

**على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

$N$ عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

**1)** بين أنَ $N$ يحقق : $309a+15c=226b$.

**2)** بين أن العدد 3 قاسم للعدد $b$.

**3)** فيما يلي نفرض أنَ : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من $a$ و $c$ .

ج) أكتب العدد $N$ في نظام التعداد ذي الأساس 10.

### التمرين الثاني :( 04 نقاط )

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $B,A$ و $I$ التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب $z$ حيث $z\neq-2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث $M$ صورة العدد المركب $z$ و $M'$ صورة العدد $z'$ .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ .

ب) بين أنه إذا كانت النقطة $M$ تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة $M'$ تنتمي إلى دائرة $(C)$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة $(E)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون $z'$ تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ وان $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنَه إذا كانت النقطة $M$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ذات المركز $A$ ونصف القطر 1 فإن النقطة $M'$ تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

أ) بين أن النقطة $E$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ .

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة $E'$ المرفقة بالنقطة $E$ .

☜ **التمرين الثالث ( 05 نقاط )**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بـ** : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ .

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ .

ج) **أحسب عبارة** $v_n$ **بدلالة** $n$ **ثم استنتج أن** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ **ثم أحسب** $\lim_{n\to+\infty}u_n$ .

☜ **التمرين الرابع : ( 07 نقاط )**

**I.** نعتبر الدالة العددية $g$ **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

وليكن $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **أحسب** $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا **ثم أحسب** $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ . ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$ .

4) أ) **أحسب** $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(-x+1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) **أرسم** $(\Delta)$ **و** $(C_g)$.

6) **استنتج إشارة** $g(x)$ عندما يتغير $x$ **في المجموعة** $\mathbb{R}$.

**II.** $f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ **ثم أحسب** $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ .

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل عدد حقيقي $x$ $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **ثم أحسب** : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$ .

4) **أحسب** $\int_{-\ln 3}^{0}f(x)\,dx$

## ☜ الموضوع الثاني

### ☜ التمرين الأول ( 04 نقاط )

$r$ عدد حقيقي موجب تماما و $\theta$ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;®[$ .

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$ .

**1)** أكتب كلا من الأعداد $z_1, z_0$ و $z_2$ على الشكل المثلثي .

**2)** أ) عين العددين الحقيقيين $r$ و $\theta$ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$ .

ب) عيِّن عندئذ قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا .

**3)** نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $B, A$ و $C$ التي لواحقها : $z_1, z_0$ و $z_2$ على الترتيب .

أ) عين $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$ .

ب) عيِّن طبيعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث ، $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 3$

### ☜ التمرين الثاني :( 04 نقاط)

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

**1-** أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x, y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن $x$ مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة $(E)$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$.

ج) استنتج حلول الجملة $(S)$ : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

**2-** $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\sim 0\sim 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\sim \quad 0\sim}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين ~ و حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة $(E)$ .

### ☜ التمرين الثالث ( 04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ , $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1) برهن أن المثلث $ABC$ قائم .

2) برهن أن المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$ .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ المستوي العمودي على $(AC)$ و المار من النقطة $A$ .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع كلا من المستويين $(P)$ و $(P')$.

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$ . بين أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ .

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث $BDC$ ثم استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستوي $(BDC)$

☜ **التمرين الرابع :( 08 نقاط)**

**I.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبيَن أنَ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

3- بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$.

5- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أنَ $(C_f)$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0),f(3)$ ثم أرسم $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$.

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية :
$(E): f(x)=x+m$

**II.** نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيَن أنَ الدالة $G$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب $I_1$.

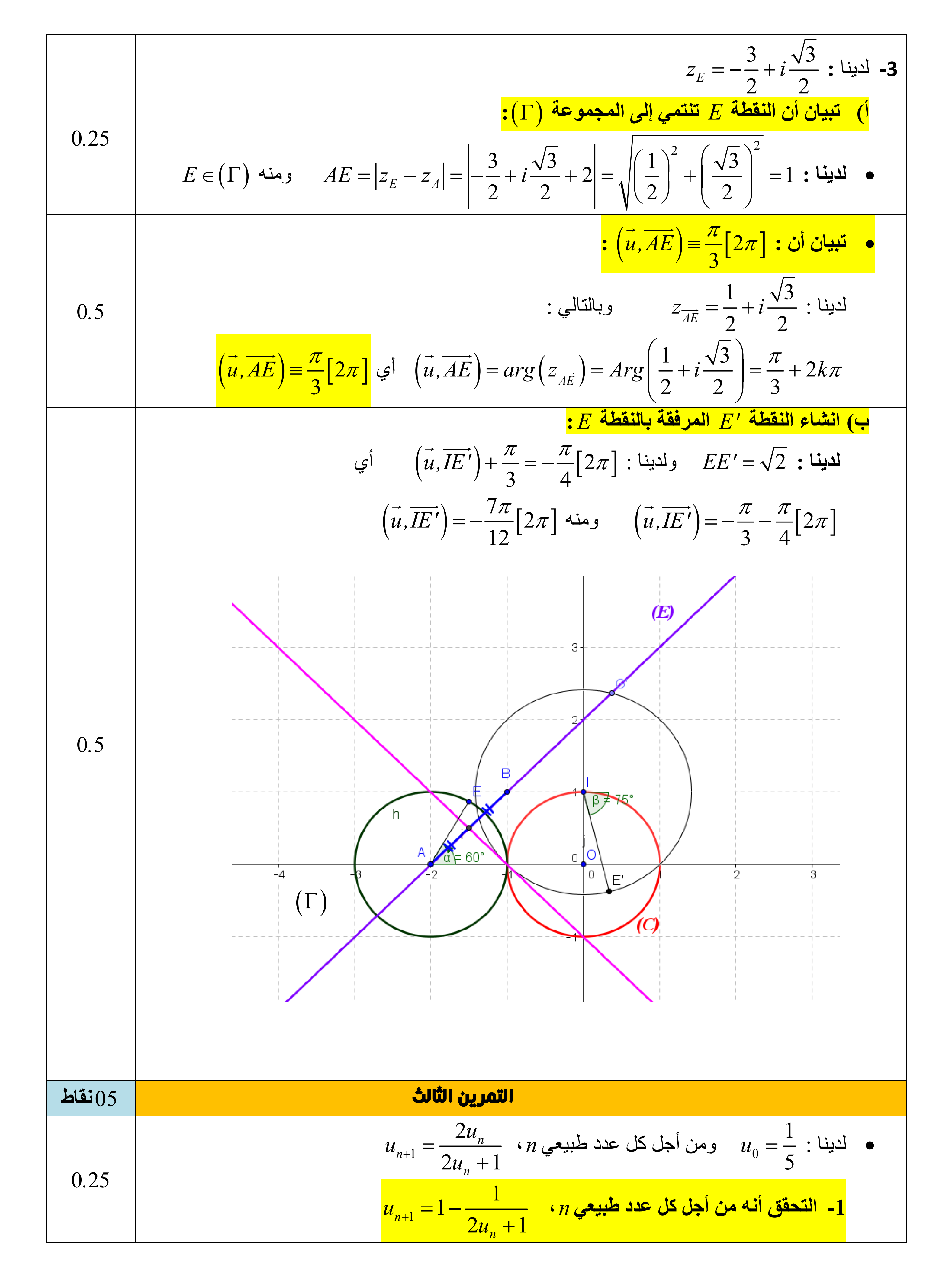
2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم $n$.

ب) أحسب $I_2$.

3- أحسب بـ $cm^2$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

| العلامة | الإجابة |
|---|---|
| | الموضوع الأول |
| 04 | **التمرين الأول** |
| 01 | لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$<br>1) تبيان أنَ $N$ يحقق : $309a+15c=226b$<br>• لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$<br>• ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$<br>أي $N=577b+8a$<br>• **إذن :** $626a+125b+30c=577b+8a$<br>**اي** $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$ |
| 0.25 | 2) تبيان أن العدد 3قاسم للعدد $b$:<br>• لدينا : $3(103a+5c)=226b$<br>- لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص . |
| 0.75 | 3) نفرض $b=3$.<br>أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$<br>• لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$<br>• ولدينا : $309a-618=60-15c$<br>ومنه $309(a-2)=60-15c$ |
| $2\times0.75$ | ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$:<br>• لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$<br>$5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$حسب مبرهنة غوص .<br>• استنتاج قيمة $a$ :<br>بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$<br>ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$.<br>• استنتاج قيمة العدد $c$:<br>لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$<br>أي $c=4$ |
| 0.5 | ج) كتابة العدد $N$ في نظام التعداد 10:<br>$N=577(3)+8(2)=1747$ |
| 04نقاط | ✍ **التمرين الثاني** |
| 0.25 | • لدينا : $z'=\frac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$<br>**1- أ) التحقق من أنَ :** $z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$<br>• لدينا : $z'=\frac{iz+i+1}{z+2}=\frac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | **ب) تبيان أنه إذا كانت $M$ تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن $M'$ تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:** <br> • لدينا : $M$ تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$ <br> • ولدينا : $\frac{\lvert i\rvert\times\lvert z+1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}=\left\lvert\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right\rvert=\lvert z'\rvert$ أي $OM'=\frac{BM}{AM}=1$ <br> • إذن $OM'=1$ ومنه $M'$ تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$ |
| 0.5 | ج) **تعيين طبيعة المجموعة $(E)$ بحيث يكون $z'$ تخيليا صرفا :** <br> • $z'$ تخيلي صرف معناه $Arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$ <br> • ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i)+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ <br> معناه : $\frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$ <br> أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi$ <br> • المجموعة $(E)$ هي المستقيم $(AB)$ ماعدا النقطتين $A$ و $B$. <br> $(E)=(AB)-\{A,B\}$ |
| 0.25 | **-2 أ) التحقق من أنّ : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$** <br> • لدينا : $\frac{1-i}{z+2}=\frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=z'-i=\frac{iz+i+1}{z+2}-i$ أي $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ |
| 0.25 | **ب) استنتاج أنّ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ :** <br> • لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $\lvert z'-i\rvert=\left\lvert\frac{1-i}{z+2}\right\rvert$ أي $\lvert z'-i\rvert=\frac{\lvert 1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}$ <br> وبالتالي : $IM'=\frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$ |
| 0.5 | • **استنتاج أنّ : $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$** <br> لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i)=Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$ <br> أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$ ومنه <br> $Arg(z'-i)+Arg(z+2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ <br> اي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ |
| 0.5 | **ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة $M$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ذات المركز $A$ ونصف القطر $1$ فان النقطة $M'$ تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :** <br> • لدينا : $M$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ذات المركز $A$ ونصف القطر $1$ معناه $AM=1$ <br> • ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ <br> أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه $M'$ تنتمي إلى دائرة مركزها $I$ ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ |

| | |
|---|---|
| 0.25 | **-3** لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>**أ) تبيان أن النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$:**<br>• **لدينا :** $AE=\lvert z_E-z_A\rvert=\left\lvert -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right\rvert=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ومنه $E\in(\Gamma)$ |
| 0.5 | • **تبيان أن :** $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:**<br>لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي :<br>$(\vec{u},\overrightarrow{AE})=arg(z_{\overrightarrow{AE}})=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ |
| 0.5 | **ب) انشاء النقطة $E'$ المرفقة بالنقطة $E$ :**<br>**لدينا :** $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي<br>$(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$<br> |
| 05 نقاط | **التمرين الثالث** |
| 0.25 | • لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$<br>**-1 التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$،** $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ |

| | |
|---|---|
| | - لدينا : $1-\frac{1}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ |
| 0.75 | **2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n<\frac{1}{2}$**<br>نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$<br>اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.<br>2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ .<br>- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$<br>وبالتالي $1<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ... $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$<br>وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .<br>3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$. |
| 0.25 | **ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$**<br>• لدينا : $\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=u_{n+1}-u_n$ . |
| 0.5 | • **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**<br>ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$<br>- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$<br>ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$<br>وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$<br>- ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$<br>- أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. |
| 0.5 | ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**<br>$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.<br>• **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$ |

| | |
|---|---|
| 3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$<br>**أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :**<br>• لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$<br>أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$<br>$v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n+1}\times\frac{2u_n+1}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$<br>وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$ | 0.75 |
| **ب) حساب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ :**<br>• لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times6^n$<br>• **استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$**<br>- لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$<br>- ومنه $\left(2v_n-3^n\right)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$<br>إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}$ ومنه<br>$u_n==-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}=\frac{2^n\times3^n}{2\times3^n\times2^n+3\times3^n}$ أي $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ | 0.5<br>0.75 |
| • حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$ | 0.5 |
| **التمرين الرابع** | **07 نقاط** |
| I. لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)$<br>**1) حساب النهايات :**<br>• **حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ :** | |

| | |
|---|---|
| 0.25<br><br>0.25 | $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$<br>- **التفسير الهندسي** : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$ |
| 0.25 | • **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ :**<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$ |
| 0.5 | **2) تبيان أنّ $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$**<br>• لدينا : $g'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$<br>أي $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ |
| 0.25 | • **استنتاج اتجاه تغير الدالة $g$:**<br>(جدول الإشارة أدناه) |
| 0.5 | • **جدول التغيرات :**<br>(جدول التغيرات أدناه) |
| 0.5 | **3) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$**<br>• لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه :<br>$g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$ أي $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$ |

جدول إشارة $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $-e^{2x}$ | $-$ |
| $g'(x)$ | $-$ |

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $0$ ↘ $-\infty$ |

<table>
<tr><td>

4) أ) **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ :

• لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

• **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $(C_g)$ عند $-\infty$.

</td><td>0.5<br><br>0.25</td></tr>
<tr><td>

5) **الرسم :**

</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

6) **استنتاج اشارة** $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $-$ |

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

**.II** لدينا : $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$

1) **البرهان أنّ :** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

• نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانّ : $t\to0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

• **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

2) **تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x$، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ :

• لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

0.25

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $-$ |
| $f'(x)$ | $-$ |

0.5

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \searrow 0$ |

0.25

**3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$**

- من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

0.5

- حساب $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$ :

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

0.5

**4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$ : بالمكاملة بالتجزئة**

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

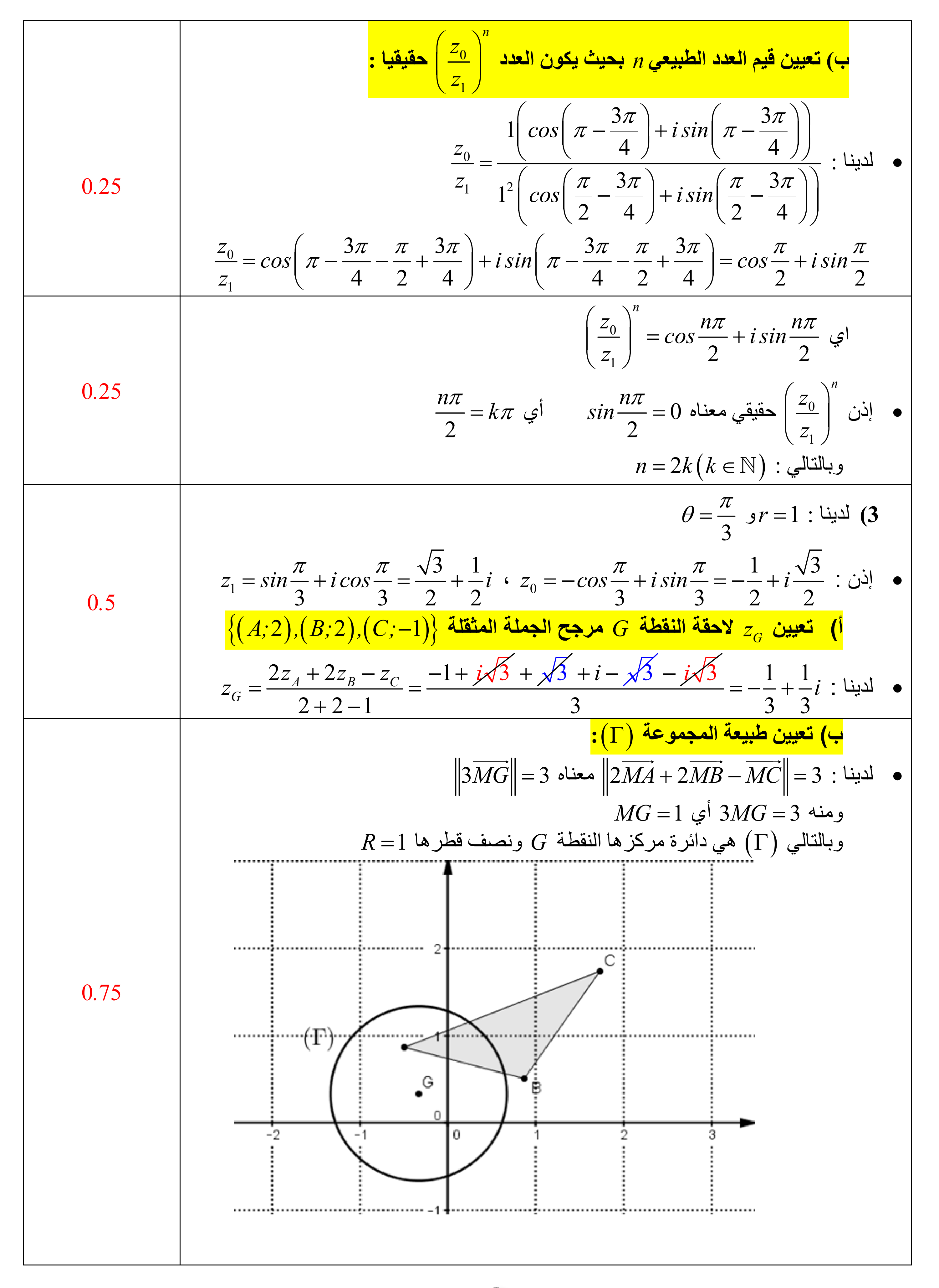
أي $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$

$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$ إذن $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$

## الموضوع الثاني

| الإجابة | العلامة |
|---|---|
| **التمرين الأول :** | **04 نقاط** |
| • لدينا : $z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$ ، $z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)$ و $z_2=\sqrt{3}(1+i)$ حيث $r\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\theta\in[0;\pi]$ <br> **1) كتابة الأعداد $z_1,z_0$ و $z_2$ على الشكل المثلثي :** <br> • لدينا : $z_0=r\left(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right)$ <br> $z_1=r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ <br> $z_2=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | $3\times0.5$ |
| **2) أ) تعيين العددين الحقيقيين $r$ و $\theta$ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$** <br> • لدينا : $\overline{z_0}=r\left(\cos(-\pi+\theta)+i\sin(-\pi+\theta)\right)$ <br> - $z_1=\overline{z_0}$ معناه <br> $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=r\left(\cos(-\pi+\theta)+i\sin(-\pi+\theta)\right)$ <br> ومنه : $\begin{cases}r^2=r\\ \frac{\pi}{2}-\theta=-\pi+\theta+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ أي $\begin{cases}r^2-r=0\\ -2\theta=-\frac{\pi}{2}-\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ <br> وبالتالي : $\begin{cases}r=0\vee r=1\\ -2\theta=-\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ إذن $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}-k\pi\,(k\in\{0;1\})\end{cases}$ <br> من أجل $k=0$ نجد : $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ( مقبول لأنّ $\theta\in[0;\pi]$ ) <br> من أجل $k=1$ نجد $\theta=\frac{3\pi}{4}-\pi$ ( مرفوض ) <br> $z_1=\overline{z_0}$ معناه $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$ | 0.75 |

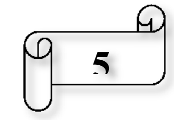
| | |
|---|---|
| 0.25 | **ب) تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :** <br> • لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$ <br> $\frac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ |
| 0.25 | أي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$ <br> • إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$ <br> وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$ |
| 0.5 | **3)** لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ <br> • إذن : $z_0=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ <br> **أ) تعيين $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$** <br> • لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$ |
| 0.75 | **ب) تعيين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$:** <br> • لدينا : $\left\Vert 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\Vert=3$ معناه $\left\Vert 3\overrightarrow{MG}\right\Vert=3$ <br> ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$ <br> وبالتالي $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها النقطة $G$ ونصف قطرها $R=1$ |



| التمرين الثاني | 04 نقاط |
|---|---|
| لدينا : $(E): 5x-6y=3$<br>**1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة $(E)$ فإن $x$ مضاعف للعدد 3:**<br>• لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$<br>أي $5x=3(1+2y)$<br>• لدينا : $3/5x$ و $5\wedge 3=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي $x$ مضاعف للعدد 3 | 0.25 |
| **ب) تعيين حل خاص للمعادلة $(E)$ :**<br>• نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\frac{5\times3-3}{6}=\frac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة $(E)$ | 0.5 |
| • **حل المعادلة $(E)$:** لدينا : $5x-6y=5\times3-6\times2$ يكافئ $5x-5\times3=6y-6\times2$<br>أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$<br>• لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .<br>أي $x-3=6k\,(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\mathbb{Z})$<br>• من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$<br>ومنه $y-2=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2\,(k\in\mathbb{Z})$<br>- مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$ | 0.5 |
| **ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$**<br>• $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$<br>أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$<br>ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$ | 0.75 |
| **2-** لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5$<br>• **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة $(E)$:**<br>- لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$<br>ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$<br>مع $\alpha\le2$ و $\beta\le4$ | 0.75 |
| • **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة $(E)$ معناه $5a-6b=3$**<br>ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$<br>أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$<br>بعد تقسيم الطرفين على العدد $-3$ نجد :<br>$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة | 0.75 |

| التمرين الثالث | 04 نقاط |
|---|---|
| لدينا : $A(3;-2;2), B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$<br>**1) البرهان على أنَ المثلث $ABC$ قائم :**<br>- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$<br>ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$<br>و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$<br>إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$. | 0.5 |
| **2) البرهان على أنَ المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$ :**<br>• لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$<br>- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$<br>- نعوض بإحداثيات النقطة $A$ في معادلة $(P)$ نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$<br>وبالتالي : **المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$** | 0.5 |
| **3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ العمودي على المستقيم $(AC)$ والمار من النقطة $A$ :**<br>لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P')$ وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$ من الشكل : $3x-3z+d=0$<br>- تعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $A$ نجد :<br>$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$<br>وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$ : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$ | 0.5 |
| **4) كتابة تمثيل وسيطي لـ $(\Delta)$ مستقيم تقاطع المستويين $(P)$ و $(P')$ :**<br>• لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ وبالتالي<br>$\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$<br>- نضع : $z=t$ وبالتالي : $(\Delta): \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$ | 0.5 |
| **5) أ) تبيان أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$**<br>• **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :<br>- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$<br>- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$<br>- **وبالتالي المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$** | 0.5 |

| الإجابة | العلامة |
|---|---|
| ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ :<br>$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$<br>- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و<br>$AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$<br>- أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$ $\quad$ $v_{ABCD}=27uv$ | 0.5 |
| ج) تبيان أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$ :<br>- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و$\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$<br>وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times6-3(-6)+6\times0=36+18=54$<br>- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$<br>أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$<br>$cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$ | 0.5 |
| د) حساب مساحة المثلث $BDC$ :<br>- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times9\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$<br>- استنتاج المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(BDC)$ :<br>لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$<br>ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times27}=3$ $\quad$ $d\left(A,(BDC)\right)=3$ | 0.5 |
| | |
| **التمرين الرابع** | **08 نقاط** |
| I. لدينا : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$<br>(1 أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ :<br>- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\\lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$ | 0.25 |
| • تبيان أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ :<br>لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$ | 0.25 |



أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$

---

**ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:**

- **لدينا** : $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

**وبالتالي** : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

0.5

---

**ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة** $f$ :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $(x-1)^2e^{-x+1}$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ |

0.25

---

- **جدول التغيرات :**

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

0.5

---

**2) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$:**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$

0.25

---

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$:**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

0.5

---

**3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.8<\alpha<1.9$:**

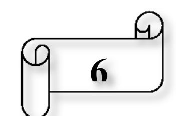
- **لدينا** $f$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

**ولدينا** $f(1.8)=1.8-((1.8)^2+1)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-((1.9)^2+1)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.8<\alpha<1.9$.

0.5



**4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1:**

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$y = 1\times(x-1) - 1 = x-2$ أي $(T): y = x-2$

0.5

**5) تبيان أنّ $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ :**

- لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2\times(-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ .

- **استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

- **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحنى $(C_f)$

01

**6) حساب $f(3), f(0)$ :** $f(3) = 3-9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$

**الرسم :**

01

| | |
|---|---|
| 0.5 | 7) **المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$**<br>• هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من $(T)$ و$(\Delta)$ .<br>• إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .<br>• إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .<br>• إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .<br>• إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا . |
| 0.5 | II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$<br>**1- أ) تبيان أنَ الدالة $G$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $g$ حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:**<br>• لدينا :<br>$G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$<br>ومنه $G$ دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$. |
| 0.25 | ب) **حساب $I_1$** :<br>• لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$ |
| 0.5 | **2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$**<br>• لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$<br>نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$<br>ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$<br>وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$<br>ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$ |
| 0.25 | **ب) حساب** $I_2$:<br>$I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$ |
| 0.5 | **3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1,x=0$:**<br>$S=\int_0^1[y-f(x)]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$<br>أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$<br>$S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$ |

ثانوية بلحاج قاسم نورالدين – الشلف　　　　　　　　　　السنة الدراسية : 2012 -2013

**المستوى : 3 ع ت**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　المدة :3 ساعات و 30 د

**اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات**

## اختر موضوعا واحدا من بين الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

**التمرين الأول** : (05 نقاط)

1 ـ نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$U_0 = 0$ و $U_1 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ .

أـ احسب $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$ .

ب ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$ .

جـ ـ في الورقة المرفقة (1)(ترجع مع ورقة الامتحان) ، مثلنا في معلم متعامد و متجانس المستقيمين اللذين معادلتيهما : $y = x$ ، $y = \frac{1}{2}x + 3$ .

مثل على محور الفواصل الحدود $U_0$، $U_1$، $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$ .(دون حسابها،موضحا خطوط التمثيل).

ما هو تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية $(U_n)$ ؟

2 ـ نعتبر المتتالية $(V_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n - 6$ .

أ ـ بين أن المتتالية $(V_n)$ ، متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب ـ أكتب عبارة $V_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$ .

جـ ـ بين أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

**التمرين الثاني** : ( 04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ . نعتبر النقط :

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$ .

1 ـ بين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ليست في استقامية .

2 - $(d)$ المستقيم المعرف بتمثيل الوسيطي التالي:

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$$

أـ بين أن المستقيم $(d)$ عمودي على المستوي $(ABC)$ ،ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

3 ـ نسمي $H$ النقطة المشتركة بين المستقيم $(d)$ و المستوي $(ABC)$ .

أ ـ بين أن النقطة $H$ هي مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$ .

ب ـ ما طبيعة $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث : $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ ؟

جـ ـ ما طبيعة $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث : $\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$ ؟

د ـ عين طبيعة و العناصر المميزة لتقاطع المجموعتين $(\Gamma_1)$ ، $(\Gamma_2)$ .

**التمرين الثالث : (04 نقاط)**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

نعتبر كثير الحدود $P(Z)$ للمتغير المركب $Z$ حيث :

$$P(Z)=Z^3-2Z^2+16$$

1 - أ ) عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ حيث : $P(Z)=(Z+2)(Z^2+aZ+b)$ .

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z)=0$ .

2 - نعتبر النقطتين $A$ ، $B$ ذات اللاحقتين على الترتيب $Z_A$ ، $Z_B$ حيث :

$Z_A=2-2i$ ، $Z_B=2+2i$ .

أ) أكتب كل من $Z_A$ ، $Z_B$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي .

ب) احسب الأطوال $OA$ ، $OB$ ، $AB$. استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .

3 - نسمي $(T)$ التحويل النقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $Z$ ، النقطة $M'$ ذات اللاحقة $Z'$ حيث :

$Z'=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$ .

أ) ما طبيعة التحويل $(T)$ ؟ عين العناصر المميزة له.

ب) عين الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتحويل $(T)$ .

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x)=2e^x-x-2$$

1 -أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2 - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر نرمز إليه بـ $\alpha$ حيث $-1,6\prec\alpha\prec-1,5$ .

3 - حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ .

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2$ ( وحدة الطول هي السنتيمتر).

1 - احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$. ماهو التفسير البياني للنتيجة؟ و لحساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ يمكن اعتبار $e^{2x}$ كعامل مشترك.

2 - احسب الدالة المشتقة ، ثم بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ . استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

3 - بين أن $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ . استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ .

4 - شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

5 - مثّل المنحني $(C_f)$ في المستوي السابق.

6 -أ) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب ما يلي : $\int_0^2 xe^x dx$ .

ب) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(C_f)$ ومحور الفواصل و المستقيمان اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=2$ .

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول** : ( 05 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x)=\ln(x^2+4)$$

**الجزء** $A$ :

1 ـ أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ .

2 ـ نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=f(x)-x$$

أ ـ أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ب ـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $[2;3]$ . أحصر العدد $\alpha$ بالتقريب إلى $10^{-1}$ .

جـ ـ برر وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha$ ( نفسه في السؤال ب ) ، حل للمعادلة $f(x)=x$ .

**الجزء** $B$:

نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ : $U_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}=f(U_n)$ .

1- في الورقة المرفقة (2) ( ترجع مع ورقة الامتحان) ، مثلنا الدالة $f$ بالمنحني $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ .

مثل على محور الفواصل ، الحدود $U_0$، $U_1$، $U_2$، $U_3$. (دون حسابها، موضحا خطوط التمثيل).

2 ـ علم النقطة $I$ ذات الفاصلة $\alpha$ ( نأخذ بالتقريب $\alpha\simeq 2,2$ ) .

3 ـ أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1\le U_n\le\alpha$ .

ب) بين أن $(U_n)$ متقاربة ، ثم عين نهاية المتتالية $(U_n)$ .

**التمرين الثاني** : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $Z$ التالية :

$$(Z-2i)(Z^2-2Z+2)=0$$

تعطى الحلول على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

2 ـ نعتبر النقطتين $A$ ، $B$ ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=1+i$ ، $Z_B=2i$ .

من أجل كل عدد مركب يختلف عن $Z_A$ لدينا : $Z'=\dfrac{Z-2i}{Z-1-i}$

أ ـ نعتبر $(E)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة $Z$ بحيث $Z'$ تخيلي صرف .

- بين أن $B$ نقطة من $(E)$ . عين مجموعة النقط $(E)$ .

ب ـ نعتبر $(F)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة $Z$ بحيث $|Z'|=1$ .

- عين مجموعة النقط $(F)$ .

**التمرين الثالث** : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ ، $C(1;3;3)$.

1 ـ بين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا. عين معادلة المستو $(ABC)$ .

2 ـ نعتبر المستويين $(P_1)$ ، $(P_2)$ اللذين معادلتيهما على الترتيب :

$x-2y+2z-1=0$ و $x-3y+2z+2=0$ .

أـ بين أن المستويين $(P_1)$ ، $(P_2)$ متقاطعان . نرمز بـ $(\Delta)$ إلى مستقيم تقاطعهما .

ب ـ بين أن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ .

جـ ـ بين أن الشعاع $\vec{U}(2;0;-1)$ هو شعاع توجيه المستقيم $(\Delta)$ .

3 ـ لحساب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$ ذو تمثيل وسيطي : $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2k+1\\y=3\\z=-k+3\end{cases}$

نعتبر النقطة $M$ ذات الوسيط $k$ من المستقيم $(\Delta)$ .

أـ عين قيمة العدد الحقيقي $k$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{U}$ متعامدين .

ب ـاستنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$ .

**التمرين الرابع** : (07 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1ـ احسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2 ـ أحسب من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)+f(-x)$ . ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقطة $A(0;1+\ln 4)$ ؟

3 ـ أدرس تغيرات الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4 ـأ ـ بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصور بين $1,1$ و $1,2$ .

ب ـ من أجل أي قيمة للعدد $m$ يكون العدد الحقيقي $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$ ؟

5 ـ أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ .

ب ـ بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم $(\Delta')$ ذو المعادلة $y=x+2+\ln 4$

هما مستقيمان مقاربان مائلان للمنحني $(C)$ . ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحني $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$.

6 ـ نعتبر العدد الحقيقي الموجب تماما $\lambda$ .

أـ ماذا يمثل التكامل التالي : $I(\lambda)=\int_0^{\lambda}[f(x)-x-\ln 4]dx$ ؟

ب ـ بين أن : $I(\lambda)=2\ln(\dfrac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1})$ . ( يمكن استعمال نتيجة السؤال 5 ـ أ ).

جـ ـ عين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ بحيث يكون $I(\lambda)=1$.( تعطى القيمة المقربة للعدد $\lambda$ بالتقريب إلى $10^{-1}$ ).

انتـــــــــــــــــــــــــــهى

بالتوفيق إن شاء الله

الوثيقة (1):

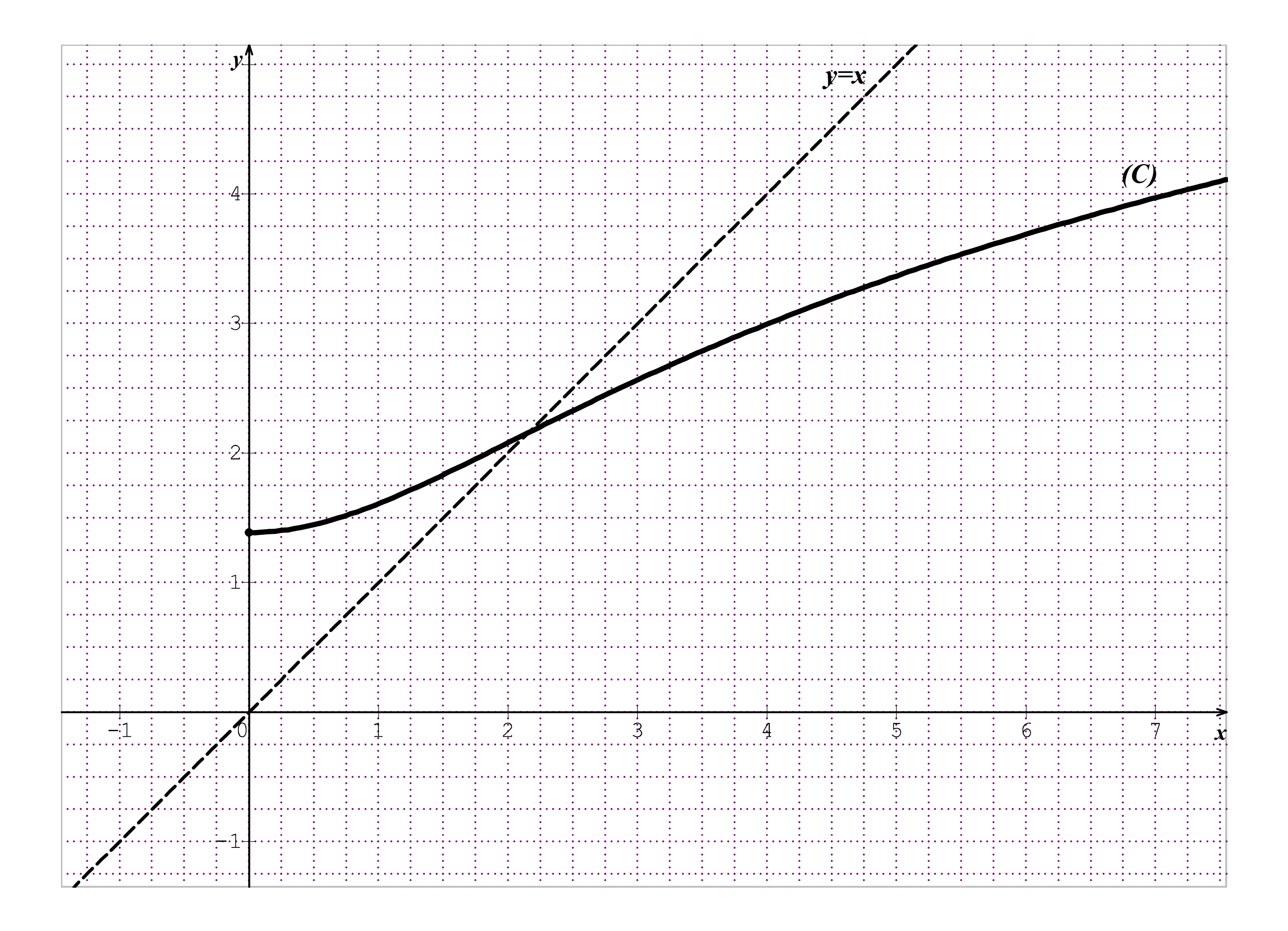
اللقب:......................

الاسم:......................

القسم:.................



الوثيقة(2):




اللقب:.......................
الاسم:.......................
القسم:........

## التصحيح

## الموضوع الأول

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية (Un) المعرفة على N بـ : $U_0=0$ و $U_1=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$

أ- **حساب $U_2$ ، $U_3$ و $U_4$** بعد الحساب نجد : $U_2=\frac{1}{2}$ ، $U_3=\frac{21}{4}$ و $U_4=\frac{45}{8}$

ب- **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ : نسمي p(n) هذه الخاصية

*)نتحقق من صحة p(0) لدينا الطرف الأول $U_{0+1}=U_1=3$ و الطرف الثاني $\frac{1}{2}U_0+3=\frac{1}{2}\times 0+3=3$ أي الطرفان متساويان

**)نفرض أن p(n) صحيحة أي $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ من أجل كل عدد طبيعي(فرضية التراجع) و نبرهن صحة p(n+1) أي $U_{n+2}=\frac{1}{2}U_{n+1}+3$

لدينا $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$ من المعطيات أي $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-(U_{n+1}-3)=\frac{1}{2}U_{n+1}+3$

( و هذا بالتعويض عن قيمة $\frac{1}{2}U_n$ من فرضية التراجع $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ حيث $\frac{1}{2}U_n=U_{n+1}-3$ )

**نتيجة :** من *) و **) ينتج أن $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ من أجل كل عدد طبيعي n

جـ) تمثيل الحدود $U_0$ ، $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ و $U_4$ على محور الفواصل

f(x)= 1 / 2 x + 3

U₀ = 0

**التخمين :**

من التمثيل نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماما و متقاربة نحو العدد 6

2) نعتبر المتتالية $(V_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=U_n-6$

أ) **إثبات أن $(V_n)$ متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول**

لدينا $V_{n+1}=U_{n+1}-6$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3-6$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-3$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}(U_n-6)$ أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

أي $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=U_0-6=-6$

ب) عبارة $V_n$ بدلالة n لدينا $V_n=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ت) $\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\left[6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=6$ لأن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ أي المتتالية $(U_n)$ **مقاربة نحو** 6 كما هو موضح في الشكل

**التمرين الثاني:** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(2\,;1\,;3)$ ، $B(-3\,;-1\,;7)$ و $C(3\,;2\,;4)$ ثلاث نقط من الفضاء

1) **إثبات أن النقط A ، B و C ليست في إستقامية** لدينا $\overrightarrow{AB}(-5\,,-2\,,4)$ و $\overrightarrow{AC}(1\,,1\,,1)$ إذن $\frac{4}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-5}{1}$ و

بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و منه النقط A ، B و C ليست في إستقامية

2) (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$ حيث $\vec{U}_d(2,-3,1)$ شعاع توجه له

**إثبات أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC)**

لدينا $\overrightarrow{U_d}.\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ و $\overrightarrow{U_d}.\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$ و منه المستقيم (d) **عمودي على المستوي** (ABC)

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) و هي من الشكل $2x-3y+z+d=0$

**و بما أن** $A(2;1;3)$ **تنتمي إلى المستوي فإن** d = -4 **و بالتالي** $(ABC): 2x-3y+z-4=0$

3) **نسمي** H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) **و المستوي** (ABC)

لتعيين إحداثياتها **نحل الجملة** $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\\ 2x-3y+z-4=0\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\\ 2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\\ t=1\end{cases}$

وبالتعويض عن قيمة t **نجد** H ( -5 , -3 , 5)

أ) **إثبات أن النقطة H هي مرجح الجملة** $\{(A;-2)\ ,\ (B;-1)\ ,\ (C;2)\}$

$$x_H=\frac{-2\times2-1\times(-3)+2\times3}{-1}=-5\ ,\quad y_H=\frac{-2\times1-1\times(-1)+2\times2}{-1}=-3\quad \text{و}\quad x_H=\frac{-2\times3-1\times7+2\times4}{-1}=5$$

**إذن** H هي مرجح الجملة $\{(A;-2)\ ,\ (B;-1)\ ,\ (C;2)\}$

ب) **طبيعة** $(\Gamma_1)$ **مجموعة النقط M من الفضاء حيث** $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ **معناه** $-\overrightarrow{MH}\ .\ \overrightarrow{CB}=0$ **معناه** $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$ و هي مجموعة نقط المستوي العمودي **على** (BC) **و المار بالنقطة** H حيث 6x + 3y -3z +54 = 0 معادلة ديكارتية له .

جـ) **طبيعة** $(\Gamma_2)$ **مجموعة النقط M من الفضاء حيث** $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ **معناه** $\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$ **معناه** $HM=\sqrt{29}$ و هي مجموعة نقط سطح الكرة ذات المركز H **و نصف القطر** $\sqrt{29}$ حيث $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=29$ **أو** $x^2+y^2+z^2+10x+6y-10z+30=0$ معادلة لها

حساب المسافة بين الركز H ( -5 , -3 , 5) **و المستوي ذو المعادلة** 6x + 3y -3z +54 = 0 **و لتكن** d

$$d=\frac{|6\times(-5)+3\times(-3)-3\times5+54|}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{|-30-9-15+54|}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=0$$

أي تقاطع المجموعتين $(\Gamma_1)$ **و** $(\Gamma_2)$ هو دائرة مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$

**التمرين الثالث: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر كثير الحدود p(z) للمتغير المركب z حيث $p(z)=z^3-2z^2+16$

1. أ) **تعيين الأعداد الحقيقية a و b حيث** $p(z)=(z+2)(z^2+az+b)$

بإستعمال مثلا طريقة هورنر نجد a = -4 **و** b = 8

| | -2 | | |
|---|---|---|---|
| 1 | -2<br>-2 | 0<br>8 | 16<br>-16 |
| 1 | -4 | 8 | 0 |

**إذن** $p(z)=(z+2)(z^2-4z+8)$

ت) **حل في** $\mathbb{C}$ **المعادلة** p(z) = 0

P(z) = 0 يكافئ z = - 2 **أو** $z^2-4z+8=0$

$\Delta=16-32=-16=16i^2$ و منه إما $z=2-2i$ **أو** $z=2+2i$

**.2** نعتبر النقطتين A **و** B **ذات اللاحقتين** $z_A=2-2i$ **و** $z_B=2+2i$

أ) **كتابة كل من** $z_A$ **و** $z_B$ **على الشكل المثلثي ثم الأسي** : لدينا $z_A=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**و** $z_B=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ب) $AB=4;OB=2\sqrt{2};OA=2\sqrt{2}$ **مع** $OA^2+OB^2=8+8=16=AB^2$ **أي المثلث** ABC **قائم في** O **و متساوي الساقين** .

.3 **نسمي** (T) التحويل النقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M **ذات اللاحقة** Z ، **النقطة** M’ **ذات اللاحقة** Z’ حيث

$$Z'=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$$

أ) التحويل (T) هو دوران مركزه O و زاوته $\frac{\pi}{3}$

ب) **الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للاحقة** A’ صورة A بالتحويل (T) لدينا من جهة

$$Z_{A'}=e^{i\frac{®}{3}}\times\left(2\sqrt{2}\right)e^{-i\frac{®}{4}}=\left(2\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{®}{3}-\frac{®}{4}\right)}=\left(2\sqrt{2}\right)e^{i\frac{®}{12}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{®}{12}+i\sin\frac{®}{12}\right)$$

و من جهة أخرى $Z_{A'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times Z_A=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(2-2i\right)=(1+\sqrt{3}i)(1-i)=(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$

ت) **إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من** $\cos\frac{®}{12}$ **و** $\sin\frac{®}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الجبري نجد ما يلي : $\sin\frac{®}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ; $\cos\frac{®}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

**التمرين الرابع:** I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x-2$

1. **دراسة تغيرات الدالة g :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x-x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2\frac{e^x}{x}-1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=2e^x-1$
- $g'(x)=0$ يكافئ $2e^x=1$ يكافئ $e^x=\frac{1}{2}$ يكافئ $x=-\ln(2)$
- $g'(x)>0$ يكافئ $x>-\ln(2)$
- $g'(x)<0$ يكافئ $x<-\ln(2)$

| x | -∞ | - ln(2) | +∞ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | − | 0 | + |
| g(x) | +∞ ↘ | -1+ln(2) | ↗ +∞ |

2. **إثبات أن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حل معدوم** لدينا $g(0)=2e^0-0-2=2*1-2=0$

**إثبات أن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حل وحيد** $\sim$ ; $-1,6<\sim<-1,5$

الدالة g **مستمرة و متناقصة تماما على المجال** $\left]-\infty\,,-\ln(2)\right]$ و تأخذ قيمها في المجال $\left[-1\,,+\infty\right[$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim$ و لدينا $g(-1.5)\simeq-5.37\times10^{-2}$ ; $g(-1.6)\simeq3.79\times10^{-3}$ إذن $-1,6<\sim<-1,5$

3. **إشارة** $g(x)$

- من أجل $x\in\left]-\infty\,,\sim\right]\cup\left[0\,,+\infty\right[$ : $g(x)>0$
- من أجل $x\in\left[\sim\,,0\right]$ : $g(x)<0$

II – نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{2x}-(x+1)e^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-xe^x-e^x\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\left(1+\frac{x+1}{e^x}\right)\right]=+\infty$

المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب و هو حامل محور الفواصل

2. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2e^{2x}-(x+1)e^x-e^x=e^x(2e^x-x-1-1)=e^x(2e^x-x-2)$

أي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

3. إثبات أن $f(\sim)=-\frac{\sim^2+2\sim}{4}$

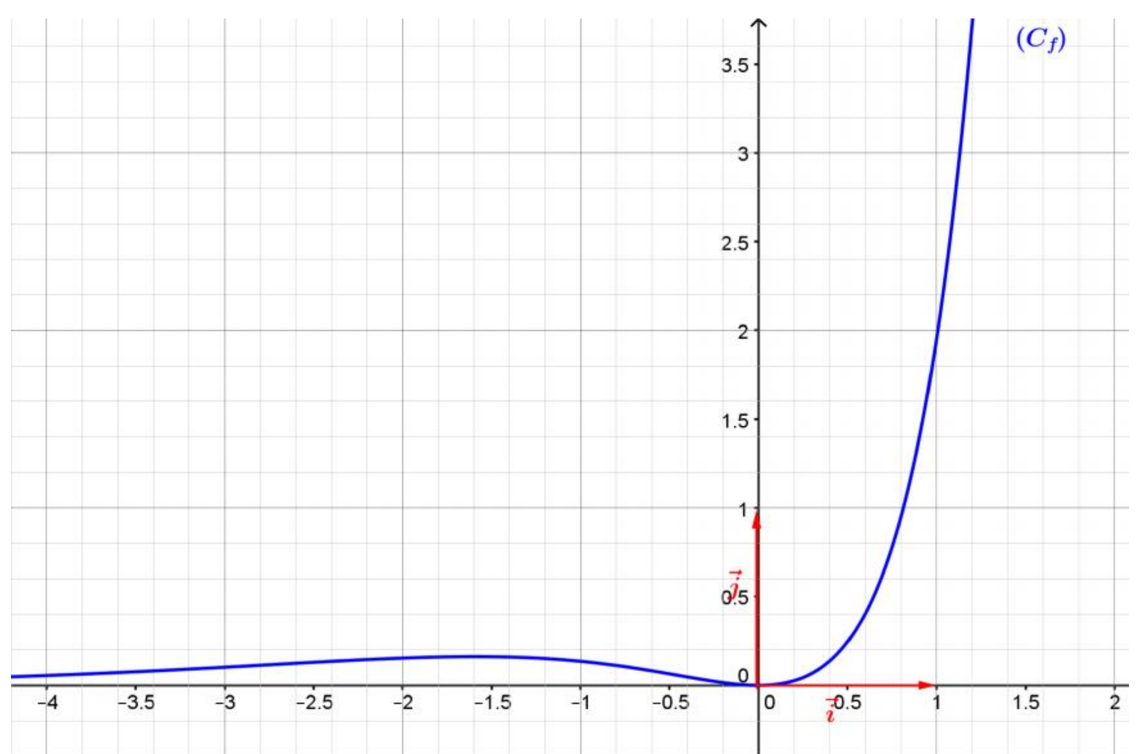
لدينا $g(\sim)=0$ معناه $e^{\sim}=1+\frac{\sim}{2}$ و بالتعويض في عبارة $f(\sim)$ نجد $f(\sim)=-\frac{\sim^2+2\sim}{4}$

إستنتاج حصر لـ $f(\sim)$ : بما أن $-1,6<\sim<-1,5$ فإن $0.11<f(\sim)<0.24$

### 4. جدول التغيرات

| x | $-\infty$ |  | ~ |  | 0 |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) |  | + | 0 | − | 0 | − |  |
| f(x) | 0 | ↗ | $-\frac{\sim^2+2\sim}{4}$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

### 5. تمثيل المنحنى $(C_f)$




6. أ) **حسب $\int_0^2 xe^x dx$ بإستعمال التكامل بالتجزئة :**

نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$ إذن

$$\int_0^2 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx=\left[(x-1)e^x\right]_0^2=(2-1)e^2-(0-1)e^0=e^2+1$$

ب) حساب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=0$ و $x=2$

ولتكن A

$$A=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left[e^{2x}-(x+1)e^x\right]dx=\int_0^2 e^{2x}dx-\int_0^2 xe^x dx-\int_0^2 e^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\int_0^2 2e^{2x}dx-(e^2+1)-\left[e^x\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^2-e^2-\cancel{1}-e^2+\cancel{e^0}$$

$$=\frac{1}{2}(e^4-e^0)-2e^2=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}-2e^2\simeq 27,3-0,5-2\times 7,39\simeq 12,02\ u.a$$

و بالسنتيمتر المربع نجد $A\simeq 12,02\times 4\simeq 48,08\,cm^2$

## تصحيح الموضوع الثاني

### التمرين الاول :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x^2+4)$

### الجزء أ)

1) دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$ لدينا $f(0)=\ln 4=2\ln 2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$

من اجل $x\in[0,+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه $f$ متزايدة تماما على هذا المجال

جدول التغيرات

| $x$ | $0$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2\ln 2$ ↗ $+\infty$ |

2) نعتبر الدالة g والمعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

أ) دراسة تغيرات الدالة g

$g(0)=f(0)=-0=2\ln 2$ , $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\dfrac{\ln(x^2+4)}{x}}_{0}-1\right)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{2x}{x^2+4}-1=\dfrac{-x^2+2x-4}{x^2+4}$

لشارة $g'(x)$ من لشارة $(-x^2+2x-4)$ و هو سالب لان $\Delta=-12$

| $x$ | $0$ ~ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $2\ln 2$ ↘ $-\infty$ |

ب) اثبات ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ من المجال $[2\ ,\ 3]$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty\ ,\ 2\ln 2]$ اذن المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ ولدينا $g(2)\simeq 0.08$ , $g(3)\simeq -0.44$

أي $g(x)=0$ تقبل حل وحيد من المجال $[2\ ,\ 3]$

باستعمال قاعدة التنصيف 2 2.5 3

لدينا $g(2,5)=\ln\left((2.5)^2+4\right)-2,5\ \simeq -0,17$ اذن $g(2)\times g(2,5)<0$ ومنه $2.0<\sim<2.5$

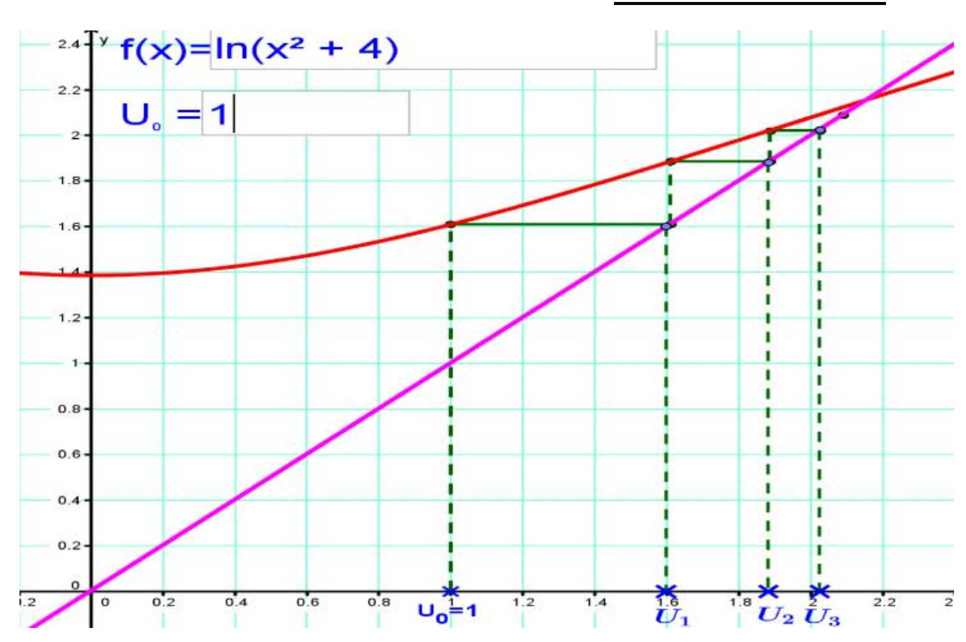
جـ) تبرير وجود عدد حقيقي ~ وحيد حل للمعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$ معناه $f(x)-x=0$ معناه $g(x)=0$ معناه $g(\sim)=0$ حيث $2.0<\sim<2.5$

### الجزء ب)

نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ: $U_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$

**1) التمثيل على محور الفواصل الحدود** $U_0$ , $U_1$ , $U_2$ , $U_3$



2) تعليم النقطة I ذات الفاصلة $\sim \simeq 2,2$

3) أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \le U_n \le \sim$

نسمي P(n) هذه الخاصية

(* نتحقق من صحة P(0) لدينا : $U_0 = 1$ و $1 \le 1 \le \sim$ أي P(0) صحيحة .

(** نفرض ان P(n) صحيحة أي $1 \le U_n \le \sim$ **فرضية التراجع** و نبرهن صحة P(n+1) أي $1 \le U_{n+1} \le \sim$؟

لدينا $1 \le U_n \le \sim$ ومنه $f(1) \le f(U_n) \le f(x)$ ومنه $\ln 5 \le U_{n+1} \le \sim$ ومنه $1 \le U_{n+1} \le \sim$

لان $g(\sim) = 0$ معناه $f(\sim) - \sim = 0$ أي $f(\sim) = \sim$ و $U_{n+1} \ge \ln 5$ و $\ln 5 \ge 1$ ومنه $U_{n+1} \ge 1$

اذن $1 \le U_{n+1} \le \sim$ أي P(n+1) صحيحة .

**نتيجة :** من * و ** وحسب مبدا الاستدلال بالتراجع فان $1 \le U_n \le \sim$ من اجل أي عدد طبيعي n .

ت) **اثبات ان** $(U_n)$ **مقاربة**

اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ندرس اشارة $U_{n+1} - U_n$ لدينا $U_{n+1} - U = f(U_n) - U_n = g(U_n)$

علما ان $g(U_n) > 0$ لان $1 < U_n < \sim$ من جدول تغيرات الدالة

أي $(U_n)$ متتالية متزايدة تماما ومحدود من الاعلى فهي متقاربة

تعين نهاية المتتالية $(U_n)$ لدينا $\lim U_n = \lim U_{n+1} = l$ أي $U_{n+1} = f(U_n)$ ومنه $l = f(l)$

ومنه $f(l) - l = 0$ ومنه $g(l) = 0$ ومنه $l = \sim$ اذن $\lim U_n = \sim$

**التمرين الثاني**

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o , \vec{u} , \vec{v})$

1) **حل في** $(\mathbb{C})$ **المعادلة ذات المجهول المركب** $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ ⟵ (*)

(*) يكافئ $z = 2i$ او $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\qquad \Delta = -4 = 4i^2$

$z = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ أو $z = 1-i$

$$z = 2i = 2e^{i\frac{®}{2}} \quad , \quad z = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{®}{4}} \quad , \quad z = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{®}{4}}$$

2) نعتبر النقطتين $A(z_A = 1+i)$ , $B(z_B = 2i)$ من اجل كل عدد مركب $z \ne z_A$ لدينا $z' = \frac{z-2i}{z-(1+i)}$

أ) نعتبر (E) مجموع النقط M(x,y) ذات اللاحقة z بحيث z' تخيلي صرف

* اثبات ان $B \in (E)$

لدينا $\frac{z_B - 2i}{z_B - (1+i)} = \frac{2i-2i}{2i-(1+i)} = 0$ و هو تخيلي صرف اذن $B \in (E)$

**تعيين مجموعة النقط (E)**

كتابة z' على الشكل الجبري بعد الحساب نجد : $z' = \frac{x^2+y^2-x-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2} - \frac{3x+y-2}{(x-1)^2+(y-1)^2} i$

z' تخيلي صرف معناه $x^2+y^2-x-3y+2=0$ معناه $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

أي (E) هي دائرة مركزها $µ\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) نعتبر (F) مجموع النقط ذات اللاحقة z حيث $|z'| = 1$

**تعين المجموعة (F)**

لدينا $|z'| = 1$ معناه $\left|\frac{z-2i}{z-(1+i)}\right| = 1$ معناه $\begin{cases} |z-2i| = |z-(1+i)| \\ z \ne z_A \end{cases}$

نضع $z = x+iy$ اذن

$|z-2i| = |z-(1+i)|$ معناه $x^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ و $(x,y) \ne (1,1)$

معناه $2x-2y+2=0$ معناه $x-y+1=0$ و هي معادلة لمستقيم

التمرين الثالث : الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1,2,2)$ $B(3,2,1)$ و $C(1,3,3)$

1) **اثبات ان النقط A ، B و C تعين مستويا** لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

لدينا $\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه A ، B و C تشكل مستوي حيث $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ شعاع ناظمي له

لدينا $\begin{cases}\vec{n}\ .\ \overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\ .\ \overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2a-c=0\\ b+c=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2a=c\\ b=-c\end{cases}$

نضع C=2 اذن a=1 و b= -2 ومنه $\vec{n}\left(1,-2,2\right)$ ومنه $x-2y+2z+d=0$

$A\in\left(ABC\right)$ اذن 1-4+4+$d$=0 أي $d$=-1 اذن $x-2y+2z-1=0$ هي معادلة ديكارتية لـ $(ABC)$

2) نعتبر المستويين $(P_1): x-2y+2z-1=0$ و $(P_2): x-3y+2z+2=0$

أ) اثبات ان $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعين وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$

لدينا $\vec{n_1}\left(1,-2,2\right)$ و $\vec{n_2}\left(1,-3,2\right)$ شعاعين ناظمين لـ $(P_1)$ و $(P_2)$ على الترتيب

مع $\frac{3}{2}\neq\frac{1}{1}$ ومنه $\vec{n_1}$ ; $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا اذن ان $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$

ب) **اثبات النقطة C تنتمي الى المستقيم** $\left(\Delta\right)$

لدينا $1-2\times3+2\times3-1=1-6+6-1=0$ أي $C\in\left(P_1\right)$

ولدينا $1-3\times3+2\times3+2=9-9=0$ أي $C\in\left(P_2\right)$

بما ان $C\in\left(P_1\right)$ و $C\in\left(P_2\right)$ فان $C\in\left(P_1\right)\cap\left(P_2\right)$ أي $C\in\left(\Delta\right)$

جـ) **اثبات ان الشعاع** $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$ **شعاع توجيه للمستقيم** $\left(\Delta\right)$

لدينا $\vec{U}\ .\ \vec{n_2}=2\times1-0\times(-3)-1\times2=0$ أي $\vec{U}$ و $\vec{n_2}$ متعامدين

و $\vec{U}-\vec{n_1}=2\times1-0\times(-2)-1\times2=0$ أي $\vec{U}$ و $\vec{n_1}$ متعامدين ومنه $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$ شعاع توجيه لـ $\left(\Delta\right)$

3) $\left(\Delta\right)$ المستقيم ذو التمثيل الوسيطي $k\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=2k+1\\ y=3\\ z=-k+3\end{cases}$

أ) **تعيين قيمة العدد الحقيقي k بحيث يكون** $\overrightarrow{AM}$ **و** $\vec{U}$ **متعامدين** $\overrightarrow{AM}\left(x-1\ ,\ y-2\ ,\ z-2\right)$ و $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$

$\overrightarrow{AM}$ و $\vec{U}$ متعامدين معناه $\overrightarrow{AM}\ .\ \vec{U}=0$ معناه $2(x-1)-1(z-2)=0$ معناه $2(2k+1-1)-(-k+3-2)=0$

معناه $4k+k-1=0$ معناه $k=\frac{1}{5}$

ب) **استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم** $\left(\Delta\right)$ وهي المسافة بين النقطة $A(1,2,2)$ و النقطة ذات إحداثيات $\left(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5}\right)$

أي $d\left(A,D\right)=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+\left(3-2\right)^2+\left(\frac{14}{5}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{4+25+16}}{5}=\frac{\sqrt{45}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right)=x+\ln4+\frac{2}{e^x+1}$

1) $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$ , $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

2) من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=x+\ln4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln4+\frac{2}{e^{-x}+1}=2\ln4+2=2(1+\ln4)$

ومنه نستنتج ان النقطة $A\left(0,1+\ln4\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

3) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'\left(x\right)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$

وهو عدد موجب من اجل أي عدد حقيقي $x$ أي $f$ دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

4) أ) **اثبات أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث** $1,1 < \alpha < 1,2$

بما أن الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فالمعادلة $f(x)=3$ تقبل حل وحيد $\alpha$ ولدينا $f(1,1)=2,99$ ، $f(1,2)=3,05$ و $f(1,1) < 3 < f(1,2)$ ومنه $1,1 < \alpha < 1,2$

ت) **تعيين قيمة العدد m حتى يكون $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$**

لدينا $f(\alpha)+f(-\alpha)=2+2\ln 4$ ومنه $3+m=2+2\ln 4$

ومنه $m=-1+2\ln 4$

5) أ) **اثبات انه من اجل أي عدد حقيقي x:** $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

لدينا $f(x)=\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}+x+\ln 4 = x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ت) **اثبات ان المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+\ln 4$ مقارب مائل** .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x+1}\right)=0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 4)\right]$ أي $(\Delta)$ مقارب مائل لـ (C) من جهة $+\infty$

و اثبات ان المستقيم ذو المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مقارب مائل

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)=0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2+\ln 4)\right]$ أي $(\Delta)$ مقارب لـ (C) من جهة $-\infty$

**دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ $(\Delta)$** ندرس إشارة $\left[f(x)-(x+\ln 4)\right]$

أي اشارة $\left(\dfrac{2}{e^x+1}\right)$ و هو موجب دوما إذن (C) يقع فوق $(\Delta)$

6) أ) **التكامل** $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left[f(x)-x-\ln 4\right]dx$

يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم المقارب $(\Delta)$ و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=\alpha$ $(\alpha>0)$

ب)

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left[f(x)-x-\ln 4\right]dx=\int_0^{\alpha}\left[2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right]dx=\left[2x-2\ln(e^x+1)\right]_0^{\alpha}=\left[2\alpha-2\ln\left(e^{\alpha}+1\right)\right]-\left[-2\ln 2\right]$$

$$=2\alpha+2\ln 2-2\ln\left(e^{\alpha}+1\right)=2\alpha+2\ln\frac{2}{e^{\alpha}+1}=2\left(\alpha+\ln\frac{2}{e^{\alpha}+1}\right)=2\left[\ln e^{\alpha}+\ln\frac{2}{e^{\alpha}+1}\right]=2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$$

جـ) **تعيين قيمة $\alpha$ بحيث يكون $I(\alpha)=1$**

$I(\alpha)=1$ معناه $2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=1$ معناه $\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ معناه $\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{\frac{1}{2}}$

معناه $2e^{\alpha}=e^{\alpha}\times e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}$ معناه $2e^{\alpha}=e^{\alpha}\times e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

معناه $e^{\alpha}\left(2-\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}$ معناه $e^{\alpha}=\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}$ معناه $\alpha=\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right)$ أي $\alpha\simeq 1,5$

**و بالتوفيق في البكالوريا إن شاء الله**

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** — **مديرية التربية لولاية الشلف** — **ثانوية بلحاج قاسم نورالدين**

**امتحان البكالوريا التجريبي** — **التاريخ : 12 ماي 2014** — **السنة الدراسية : 2013- 2014**

**الشعبة: علوم تجريبية**

---

**اختبار في مادة : الرياضيات** — **المدة : 3ساعات ونصف**

---

**على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

**I.** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

**II.** نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط $C,B,A$ لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$ , $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$ .

**1-** أ) بين أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

ب) عين طبيعة المثلث $ABC$ .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$. أرسم $(C)$.

**2-** أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$.

**3-** ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ .

ب) عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

ج) عين صورة المجموعة $(\Gamma)$ بالدوران $R$ .

### التمرين الثاني :( 05نقاط )

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;4;-5)$, $B(3;2;-4)$, $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$ .

**1)** بيَن أنَ $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$.

**2)** أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ المار من النقطة $D$ والموازي للشعاع $\vec{u}$.

**3)** ليكن $(P)$ المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$ .

أ) بين المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

ب) أثبت أن $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي .

**4)** تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ . تحقق أن النقطة $E$ تنتمي إلى $(\Delta)$ و أن $F$ تنتمي إلى $(T)$.

**5)** لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(S)$ و استنتج أنَ $(S)$ مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له .

ب) عين قيمة $\alpha$ حتى يكون $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

☜ **التمرين الثالث ( 04 نقاط)**

$(u_n)$ **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- **أحسب** $u_3, u_2, u_1$.

2- ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n \leq n + 3$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ **ثم أحسب** $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4- **نضع** : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ **و** $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

– **أحسب بدلالة** $n$ **المجموع** $S_n$ **ثم أحسب** $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

☜ **التمرين الرابع ( 07 نقاط)**

**I.** نعتبر الدالة العددية $g$ **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+2}$.

**1)** أدرس تغيرات الدالة $g$ .

**2)** استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $g(x) \geq 0$.

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.

**نسمي** $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- **أحسب** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = g(x)$ **ثم استنتج اتجاه** تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها .

3- **أحسب** $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 1)]$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ **ذي المعادلة** $y = x - 1$.

5- أ) بين أن $I(2;3)$ **نقطة انعطاف للمنحني** $(C_f)$.

ب) بين ان المنحني $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $x_0$ حيث $0 < x_0 < 0.2$.

ج) بين المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) **أحسب** $f(-1)$ **ثم أرسم** $(T)$، $(\Delta)$ **و** $(C_f)$.

6- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية :

$(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$.

7- نعتبر الدالة العددية $F$ **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1 + x)e^{-x+2} + 3$

بين أن الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ **على** $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة $2$ للمتغير .

## ☜ الموضوع الثاني

### ☜ التمرين الأول ( 05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(3;-2;2\right)$ , $B\left(6;1;5\right)$ و $C\left(6;-2;-1\right)$

و المستوي $\left(P\right): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث $ABC$ قائم .
2) برهن أن المستوي $\left(P\right)$ عمودي على المستقيم $\left(AB\right)$ ويمر من النقطة $A$ .
3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P'\right)$ المستوي العمودي على $\left(AC\right)$ و المار من النقطة $A$ .
4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ مستقيم تقاطع كلا من المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ .
5) أ) نعتبر النقطة $D\left(0;4;-1\right)$ . بين أن المستقيم $\left(AD\right)$ عمودي على المستوي $\left(ABC\right)$ .

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ .

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$ .

د) أحسب مساحة المثلث $BDC$ ثم استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستوي $\left(BDC\right)$ .

### ☜ التمرين الثاني :( 04 نقاط)

نعتبر العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حيث ، $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$ .

**1)** أكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

**2)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A, B$ و $E$ التي لواحقها $z_1$ ، $z_2$ و $z_3=z_1+z_2$ على الترتيب .

أ) برهن أن المثلث $OAB$ قائم ومتساوي الساقين .

ب) استنتج أن الرباعي $OAEB$ مربع .

**3)** أ) بين أن : $OE=2\sqrt{6}$ و أن $\left(\vec{u};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{5\pi}{12}$ .

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ .

ج) أحسب $z_3^{2016}$ .

د) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

### ☜ التمرين الثالث :( 04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

-1 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ .

-2 أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \dfrac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$ .

ب) أحسب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أن $u_n = \dfrac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

☜ **التمرين الرابع :( 07 نقاط)**

**الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة $g$.

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير $x$ في المجال $]0;+\infty[$.

**الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 - x - \dfrac{2}{x}(1 + \ln x)$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أ) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ ، $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ .

ج) بيَن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث ، $0.41 < \alpha < 0.42$.

د) بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

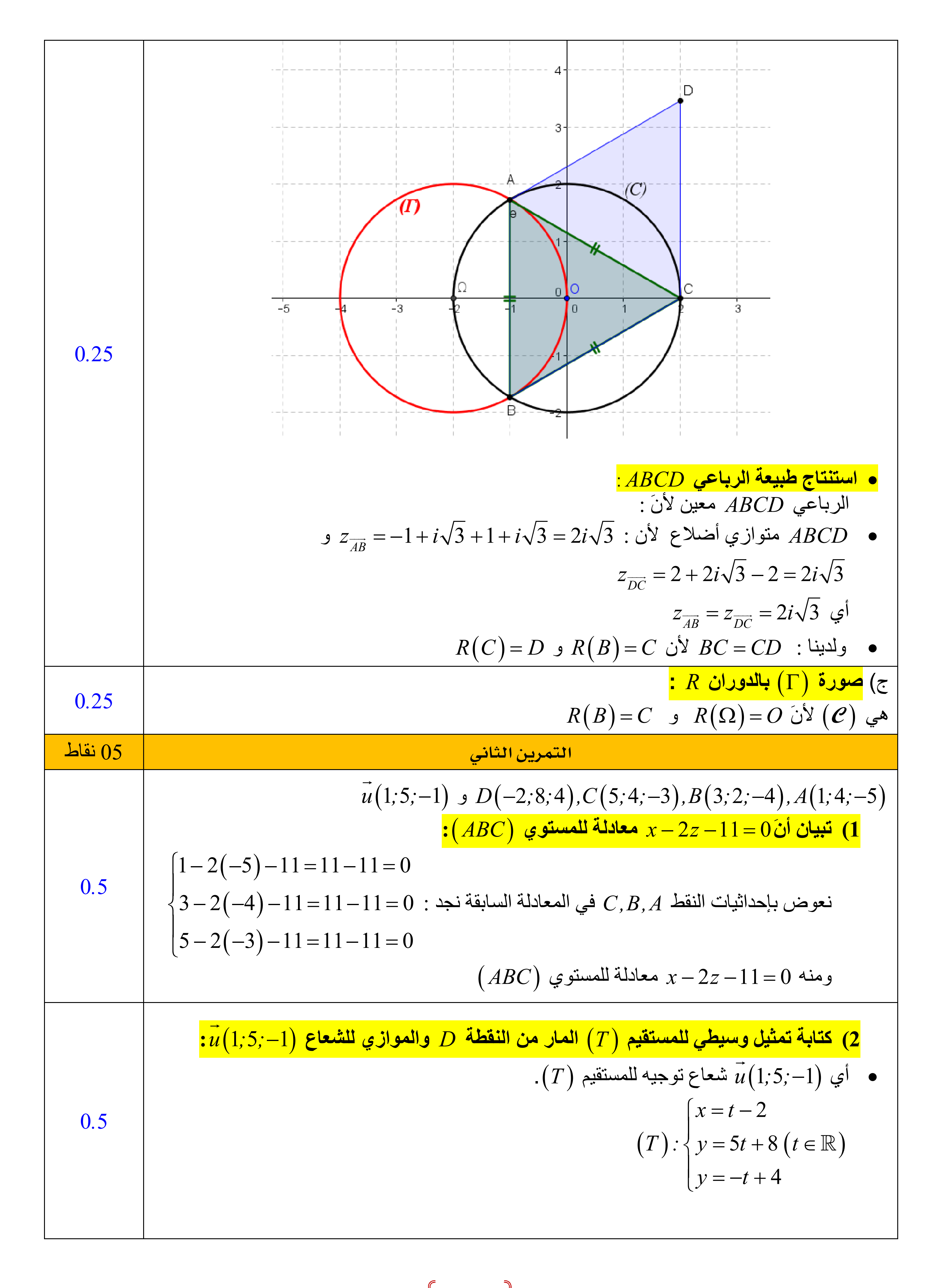
د) أرسم $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$.

3- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية :
$(E): f(x) = m - x$.

## الموضوع الأول

| التصحيح | العلامة |
|---|---|
| **التمرين الأول** | **04 نقاط** |
| **I.حل المعادلة $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$ :**<br>$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$<br>• $z-2=0$ معناه $z=2$ | 0.25 |
| • حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$<br>- حساب المميز : $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$<br>نضع $\Delta=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$<br>- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :<br>$z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$<br>• مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي $S=\left\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\right\}$ | $.25+0.25$ |
| **II.**لدينا : $z_A=-1+i\sqrt{3}, z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$<br>**1- أ) تبيان أنَ :** $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$<br>• لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$<br>- ومنه $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}=\dfrac{6}{12}+i\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$<br>- أي $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لانَ :<br>$\left\|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right\|=\left\|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$<br>- $Arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ | 0.5 |
| **ب) تعيين طبيعة المثلث $ABC$ :**<br>• لدينا : $\left\|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right\|=1$ ومنه $\dfrac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$<br>• ولدينا : $Arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ ومنه<br>$ABC$ مثلث متقايس الأضلاع | 0.25 |

| | |
|---|---|
| 0.25 | **ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث $ABC$ :**<br>• لدينا : $\lvert z_A\rvert=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2=OA$<br>$\lvert z_B\rvert=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2=OB$ و $\lvert z_C\rvert=\sqrt{(2)^2}=\sqrt{4}=2=OC$<br>• وبالتالي : $OA=OB=OC=2$ أي النقط $A,B$ و $C$ تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$<br>ونصف قطرها $r=2$ |
| 0.5 | -2 أ) **تعيين طبيعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:** $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$<br>$2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ معناه $2(x+iy+x-iy)+x^2+y^2=0$<br>ومنه $x^2+y^2+4x=0$ وبالتالي : $(x+2)^2+y^2=4$<br>أي أنَ $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$. |
| 0.5 | **ب) التحقق من أنَ $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$:**<br>- لدينا : $\Omega A=\lvert z_A-z_\Omega\rvert=\lvert -1+i\sqrt{3}+2\rvert=\lvert 1+i\sqrt{3}\rvert=2=r$<br>- ولدينا : $\Omega B=\lvert z_B-z_\Omega\rvert=\lvert -1-i\sqrt{3}+2\rvert=\lvert 1-i\sqrt{3}\rvert=2=r$<br>وبالتالي $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$. |
| 0.5 | -3 لدينا $R$ دوران مركزه النقطة $A$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.<br>**أ) تعيين صورة النقطة $B$ بالدوران $R$:**<br>• لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$<br>• ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>• ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$<br>أي $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=1+i\sqrt{3}$<br>• إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}$<br>أي $z_{B'}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}=2=z_C$ ومنه $R(B)=C$ |
| 0.25 | **ب) تعيين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$:**<br>$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$<br>أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$ |



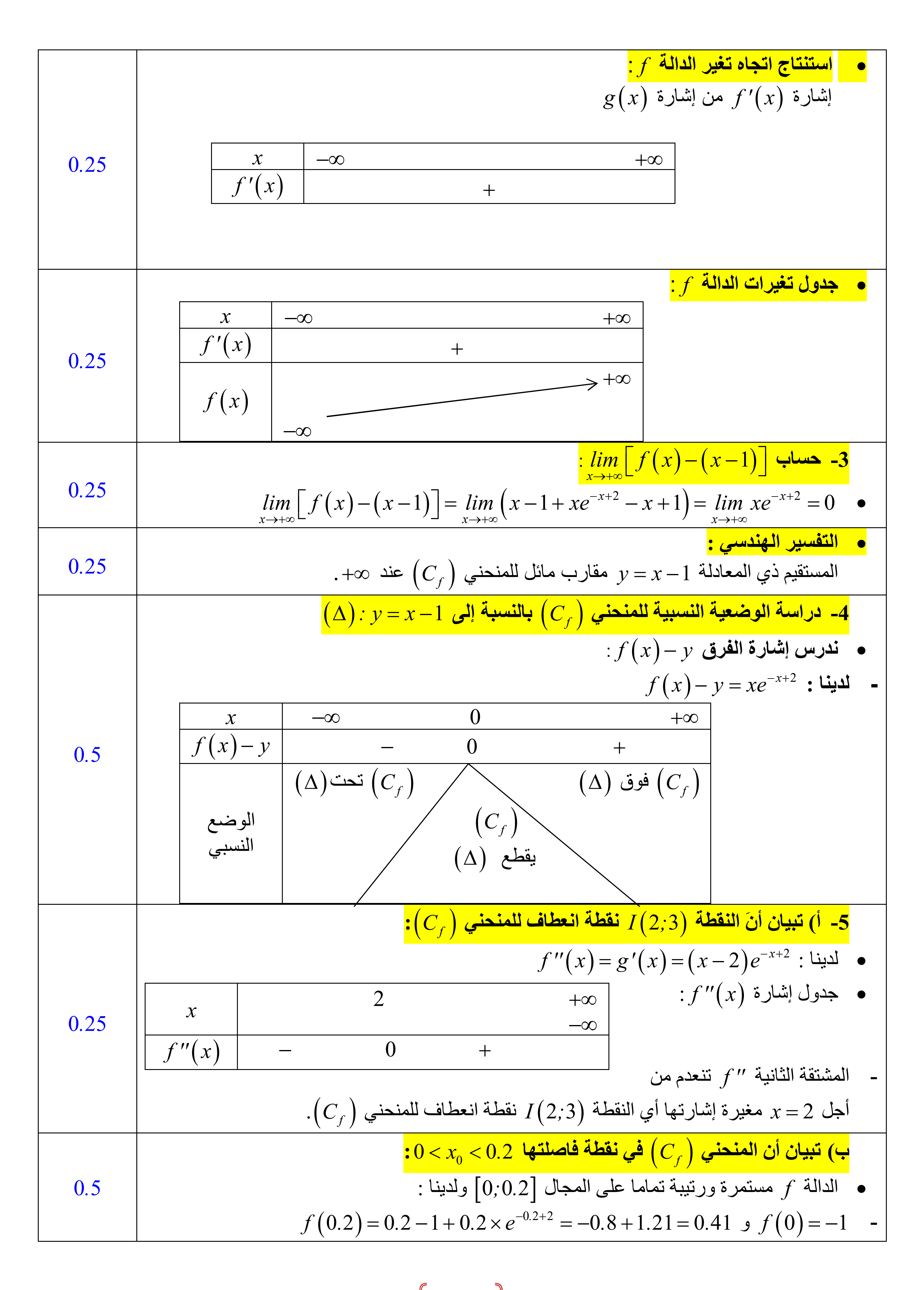
| | |
|---|---|
| 0.25 | <br>• **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$**:<br>الرباعي $ABCD$ معين لأنَ :<br>• $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overrightarrow{AB}}=-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$ و<br>$z_{\overrightarrow{DC}}=2+2i\sqrt{3}-2=2i\sqrt{3}$<br>أي $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}=2i\sqrt{3}$<br>• ولدينا : $BC=CD$ لأن $R(B)=C$ و $R(C)=D$ |
| 0.25 | ج) **صورة $(\Gamma)$ بالدوران $R$ :**<br>هي $(\mathcal{C})$ لأنَ $R(\Omega)=O$ و $R(B)=C$ |
| 05 نقاط | **التمرين الثاني** |
| 0.5 | $A(1;4;-5),B(3;2;-4),C(5;4;-3),D(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$<br>**1) تبيان أنَ $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$:**<br>نعوض بإحداثيات النقط $C,B,A$ في المعادلة السابقة نجد : $\begin{cases}1-2(-5)-11=11-11=0\\3-2(-4)-11=11-11=0\\5-2(-3)-11=11-11=0\end{cases}$<br>ومنه $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$ |
| 0.5 | **2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم $(T)$ المار من النقطة $D$ والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$:**<br>• أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(T)$.<br>$(T):\begin{cases}x=t-2\\y=5t+8\\y=-t+4\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | **3)** لدينا : $(P): x-y-z=7$<br>**أ) تبيان أن المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق المستقيم** $(\Delta): \begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$<br>• نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ في معادلة $(ABC)$ نجد : $11+2t-2t-11=0$ ومنه $0t=0$.<br>• نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ في معادلة $(P)$ نجد : $11+2t-4-t-t-7=0$ أي $0t=0$<br>وبالتالي $(\Delta)$ محتوى في كل المستويين $(ABC)$و $(P)$ فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$. |
| 01 | **ب) اثبات أنَ $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي :**<br>• لدينا : $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(T)$<br>• ولدينا $\vec{u'}(1;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.<br>• لدينا : $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا أي أنَ $(T)$و$(\Delta)$ غير متوازيين . فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .<br>نحل الجملة $\begin{cases} 11+2t=t'-2...(1) \\ 4+t=5t'+8...(2) \\ t=-t'+4...(3) \end{cases}$<br>لدينا : $\begin{cases} t=-t'+4 \\ 4-t'+4=5t'+8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=-t'+4 \\ 4t'=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=4 \\ t'=0 \end{cases}$<br>- بالتعويض في المعادلة $(1)$ نجد : $11+2(4)=0-2$ ( مستحيلة ) ومنه $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي . |
| 0.5 | **4)** لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.<br>• **التحقق من أنَ $E\in(\Delta)$ :**<br>نعوض بإحداثيات النقطة $E$ في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد : $\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$<br>ومنه $E\in(\Delta)$ |
| 0.5 | • **التحقق من أنَ $F\in(T)$ :**<br>نعوض بإحداثيات النقطة $F$ في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(T)$ نجد : $\begin{cases} -3=t-2 \\ 3=5t+8 \\ 5=-t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$<br>ومنه $F\in(T)$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | **5)** لدينا : $(S): \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$<br>**أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة $(S)$ بدلالة $\alpha$**<br>• لدينا : $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$<br>$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)-3(-y)-9(-4-z)=\alpha$<br>أي $18-6x+3y+36+9z=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$<br>• **طبيعة المجموعة $(S)$ : هي مستو شعاع ناظمي له** $\vec{n}(-6;3;9)$ |
| 0.5<br><br>0.5 | **ب) تعيين قيمة $\alpha$ بحيث يكون $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ :**<br>• لدينا $(S)$ المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه $(S)$ يمر من منتصف $[FE]$ وليكن $I$<br>- إذن $x_I=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{3-3}{2}=0$ ، $y_I=\dfrac{y_E+y_F}{2}=\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}$ ، $z_I=\dfrac{z_E+z_F}{2}=\dfrac{-4+5}{2}=\dfrac{1}{2}$<br>- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $-6\times0+3\times\dfrac{3}{2}+9\times\dfrac{1}{2}+54-\alpha=0$<br>أي $9+54-\alpha=0$ وبالتالي $\alpha=63$ |
| 04 نقاط | **التمرين الثالث** |
| $3\times0.25$ | • لدينا : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$<br>**1- حساب $u_1,u_2,u_3$:**<br>• $u_1=\dfrac{2}{3}u_0+\dfrac{1}{3}\times0+1=\dfrac{2}{3}\times2+1=\dfrac{7}{3}$<br>• $u_2=\dfrac{2}{3}u_1+\dfrac{1}{3}\times1+1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{14+3+9}{9}=\dfrac{26}{9}$<br>• $u_3=\dfrac{2}{3}u_2+\dfrac{1}{3}\times2+1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{26}{9}+\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{52+18+27}{27}=\dfrac{97}{27}$ |
| $3\times0.25$ | **2- أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n\le n+3$**<br>• نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>**1)** من أجل $n=0$ لدينا :<br>$u_0=2$ وبالتالي $u_0\le3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.<br>**2)** نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ $u_n\le n+3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $u_{n+1}\le n+4$<br>• لدينا : $u_n\le n+3$ ومنه $\dfrac{2}{3}u_n\le\dfrac{2}{3}(n+3)$ إذن $\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1\le\dfrac{2}{3}(n+3)+\dfrac{1}{3}n+1$<br>وبالتالي : $u_{n+1}\le\dfrac{2}{3}n+2+\dfrac{1}{3}n+1$ أي $u_{n+1}\le n+3$ ومنه $u_{n+1}\le n+3\le n+4$<br>إذن $u_{n+1}\le n+4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .<br>**3)** حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنَ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ |

| العلامة | عناصر الإجابة |
| --- | --- |
| 0.25 | **ب) البرهان على أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$**<br>• من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :<br>$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}(2u_n+n+3-3u_n)=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ |
| 0.25 | • **استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$:**<br>- لدينا : $u_n\le n+3$ ومنه $n+3-u_n\ge 0$ أي $\frac{1}{3}(n+3-u_n)\ge 0$<br>وبالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة . |
| 0.5 | **-3** لدينا : $v_n=u_n-n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.<br>**أ) البرهان على أنَ المتتالية $(v_n)$ هندسية :**<br>• لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}(u_n-n)$<br>أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-0=2$ |
| 0.25<br>0.25 | **ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$**<br>• لدينا : $u_n=v_n+n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$<br>• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ |
| 0.25<br>0.25 | **-4** لدينا : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$<br>• **حساب $S_n$ بدلالة $n$:**<br>أي $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n=v_0+0+v_1+1+v_2+2+...+v_n+n$<br>$S_n=v_0+v_1+...+v_n+(1+2+...+n)=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{n}{2}(1+n)$<br>وبالتالي $S_n=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}=2\times 3\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$<br>ومنه $S_n=6-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$<br>• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{n^2}-\frac{4}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$   $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}$ |

| 07 نقاط | التمرين الرابع |
|---|---|
| | **I.** لدينا : $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$ |
| $2\times0.25$ | **1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :**<br>• **حساب النهايات :**<br>- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+2}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+2}=+\infty$<br>- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^2\times e^{-x}-e^2\times xe^{-x}\right)=1$ |
| 0.25 | • **حساب المشتقة :**<br>$g'(x)=-e^{-x+2}-(1-x)e^{-x+1}=(x-2)e^{-x+2}$ |
| 0.25 | • **دراسة إشارة المشتقة :**<br>$x$: $-\infty$ ... $2$ ... $+\infty$<br>$g'(x)$: $-$ ، $0$ ، $+$ |
| 0.5 | • **جدول التغيرات :**<br>$x$: $-\infty$ ... $2$ ... $+\infty$<br>$g'(x)$: $-$ ، $0$ ، $+$<br>$g(x)$: $+\infty$ ↘ $0$ ↗ $1$ |
| 0.25 | **2) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $g(x)\geq0$ :**<br>• من أجل $x\in\mathbb{R}$ فان $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه $g(x)\geq0$ |
| $2\times0.25$ | **II.** لدينا : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$<br>**1- حساب النهايات :**<br>• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\end{cases}$<br>• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$ لأن<br>$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{e^2}=0\end{cases}$ |
| 0.25 | **2- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $f'(x)=g(x)$**<br>• **لدينا :** $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$<br>**ومنه** $f'(x)=g(x)$ |



- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |

0.25

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

0.25

**3- حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ :**

- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=0$

0.25

- **التفسير الهندسي :**

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

0.25

**4- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$**

- **ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ :**
- **لدينا :** $f(x)-y=xe^{-x+2}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

0.5

**5- أ) تبيان أنّ النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$:**

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة $f''(x)$ :

| $x$ | | $2$ | $+\infty$ $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- المشتقة الثانية $f''$ تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

0.25

**ب) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ في نقطة فاصلتها $0<x_0<0.2$:**

- الدالة $f$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :
- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$

0.5

| | |
|---|---|
| ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$<br>- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ حيث $0<x_0<0.2$<br>- أي $(C_f)$ **يقطع** $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$ | |
| **ج) تبيان أنَ المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$:**<br>$(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه معامل توجيه المماس $(T)$ يساوي 1<br>أي $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$<br>إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$ | 0.25 |
| • **كتابة معادلة ديكارتية للمماس $(T)$:**<br>$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T): y=x-1+e$ | 0.25 |
| **د) حساب $f(-1)$ :**<br>$f(-1)=-1-1-e^3=-2-e^{-3}=-22.09$<br>**الرسم :** | 0.75 |
| **-6 المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$**<br>$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$<br>ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$<br>• إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ **مع المستقيم ذي المعادلة** $y=x+m$ الموازي لكل من $(\Delta)$ و $(T)$<br>• إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .<br>• إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .<br>• إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .<br>• إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.<br>• إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل . | 0.5 |

| | |
|---|---|
| **7- تبيان أنَ الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة $2$ للمتغير :**<br>• لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$<br>ومن<br>$F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}=x-1+xe^{-x+2}$<br>أي $F'(x)=f(x)$<br>• ولدينا : $F(3)=\frac{1}{2}\times 2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$<br>وبالتالي $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة $2$ للمتغير | 0.5 |

## الموضوع الثاني

| التمرين الأول | 05 نقاط |
|---|---|
| لدينا : $A(3;-2;2), B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$<br>**1) البرهان على أنَ المثلث $ABC$ قائم :**<br>- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$<br>ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$<br>و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$<br>إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$. | 0.5 |
| **2) البرهان على أنَ المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$ :**<br>• لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$<br>- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$<br>- نعوض بإحداثيات النقطة $A$ في معادلة $(P)$ نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$<br>وبالتالي : **المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$ ويمر من النقطة $A$** | 0.5 |
| **3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ العمودي على المستقيم $(AC)$ والمار من النقطة $A$ :**<br>لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P')$ وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$ من الشكل :<br>$3x-3z+d=0$<br>- تعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $A$ نجد :<br>$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$<br>وبالتالي معادلة للمستوي $(P')$: $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$ | 0.5 |
| **4) كتابة تمثيل وسيطي لـ $(\Delta)$ مستقيم تقاطع المستويين $(P)$ و $(P')$:**<br>• لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن<br>: $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$<br>- نضع : $z=t$ وبالتالي : $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$ ;$(t\in\mathbb{R})$ | 0.75 |
| **5) أ) تبيان أن المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$**<br>• **لدينا : $D(0;4;-1)$ وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :<br>- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$<br>- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$<br>- **وبالتالي المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$** | 0.5 |

| عناصر الإجابة | العلامة |
|---|---|
| **ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ :**<br>$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$<br>- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و<br>$AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$<br>- أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$ $\qquad v_{ABCD}=27uv$ | 0.75 |
| **ج) تبيان أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$ :**<br>- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$<br>وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times6-3(-6)+6\times0=36+18=54$<br>- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\lVert\overrightarrow{DB}\rVert\times\lVert\overrightarrow{DC}\rVert\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$<br>$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ أي $cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=\frac{54}{9\times6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$<br>ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$ | 0.75 |
| **د) حساب مساحة المثلث $BDC$ :**<br>- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times9\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$<br>- **استنتاج المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(BDC)$ :**<br>**لدينا :** $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}\times27\times d(A,(BCD))=27$<br>**ومنه** $d(A,(BDC))=\frac{27}{\frac{1}{3}\times27}=3$ $\qquad d(A,(BDC))=3$ | 0.75 |
| **التمرين الثاني** | **04 نقاط** |
| • لدينا : $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$<br>**1) كتابة العددين $z_1,z_2$ على الشكل الأسي :**<br>- لدينا : $\lvert z_1\rvert=\sqrt{(3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>- نضع : $\theta_1=Arg(z_1)$ إذن $\begin{cases}cos\,\theta_1=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ sin\,\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$<br>وبالتالي : $z_1=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ | 0.5 |

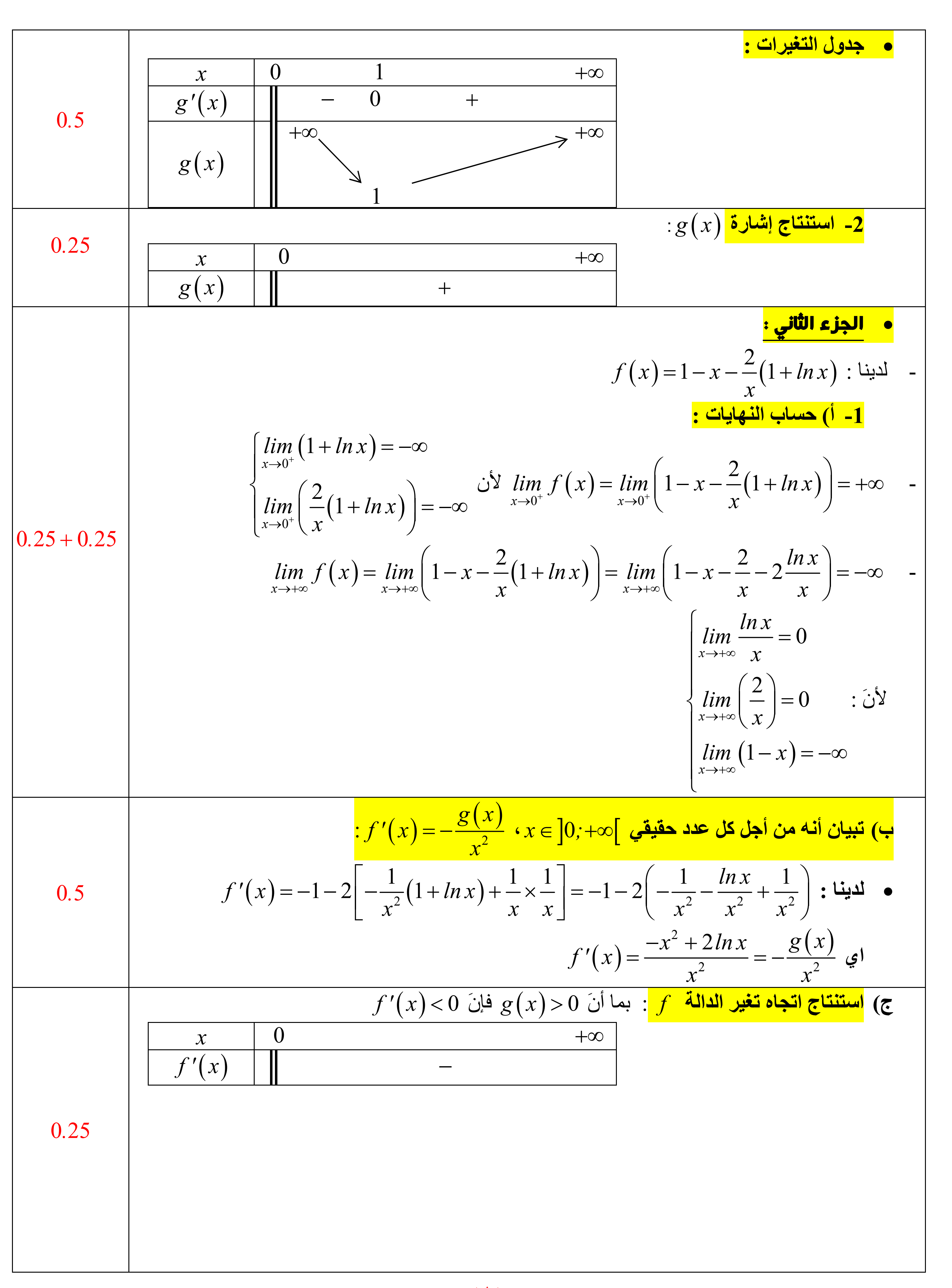
<table>
<tr><td>0.5</td><td>- لدينا : $|z_2|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(3)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$<br>- نضع : $\theta_2=Arg(z_2)$ إذن $\begin{cases}\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه<br>$\theta_2=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$<br>- وبالتالي : $z_2=2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>**2)** لدينا : $z_3=z_1+z_2$<br>**أ) البرهان على أنَ المثلث $OAB$ قائم ومتساوي الساقين :**<br>• لدينا : $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$<br>- ومنه $\frac{OB}{OA}=1$ أي $OB=OA$ و $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$<br>أي أنَ المثلث $OAB$ قائم ومتساوي الساقين</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>**ب) استنتاج أنَ الرباعي $OAEB$ مربع :**<br>• لدينا :<br>$z_{\overrightarrow{AE}}=z_1+z_2-z_1=z_2$ و $z_{\overrightarrow{OB}}=z_2$<br>أي أنَ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$<br>ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع .<br>• ولدينا : $OAB$ مثلث قائم ومتساوي الساقين<br>وبالتالي $OAEB$ مربع .</td></tr>
<tr><td>$0.25+0.25$</td><td>**3) أ) تبيان أنَ $OE=2\sqrt{6}$ :**<br>• **لدينا :** $OE^2=OA^2+AE^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2=12+12=24$<br>**ومنه** $OE=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$<br>• **تبيان أنَ** $(\vec{u},\overrightarrow{OE})=\frac{5\pi}{12}$ :<br>- لدينا : $(\vec{u},\overrightarrow{OE})=(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$<br>ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OE})=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi+3\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$</td></tr>
<tr><td></td><td>**ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ :**<br>• لدينا : $z_3=z_1+z_2=3+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+3i=(3-\sqrt{3})+i(3+\sqrt{3})$</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| $0.25+0.25$ | • ولدينا : $z_3=2\sqrt{6}\left(cos\frac{5\pi}{12}+i\,sin\frac{5\pi}{12}\right)$<br>بالمطابقة نجد :<br>$cos\frac{5\pi}{12}=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$<br>و $sin\frac{5\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ |
| $0.5$ | **ج) حساب $z_3^{2016}$ :**<br>$z_3^{2016}=\left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos\frac{2016\times5\pi}{12}+i\,sin\frac{2016\times5\pi}{12}\right)=\left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(cos\,840\pi+i\,sin\,840\pi\right)$<br>أي $z_3^{2016}=\left(2\sqrt{6}\right)^{2016}$ |
| $0.5$ | **د) تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون ، $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :**<br>$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا معناه $\left(cos\frac{5n\pi}{12}+i\,sin\frac{5n\pi}{12}\right)$ حقيقيا<br>ومنه $sin\frac{5n\pi}{12}=0$ وبالتالي $\frac{5n\pi}{12}=k\pi$ أي $5n\pi=12k\pi$<br>إذن $5n=12k$ ومنه $n=12\left(\frac{k}{5}\right)$ وبالتالي $n=12k'\left(k'\in\mathbb{N}\right)$ |
| **04 نقاط** | **التمرين الثالث** |
| $0.25$ | • لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$<br>**1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$**<br>- لدينا : $1-\frac{1}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ |
| $0.75$ | **2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0<u_n<\frac{1}{2}$**<br>نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$<br>اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.<br>2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنّ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ .<br>- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ |

| | |
|---|---|
| وبالتالي $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1$ إذن $-1 < -\frac{1}{2u_n+1} < -\frac{1}{2}$<br>وأخيرا : $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2u_n+1} < 1$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .<br>3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$. | |
| **ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$**<br>• لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n+1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ . | 0.25 |
| • **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**<br>ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$<br>- لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$<br>ولدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $-1 < -2u_n < 0$ أي $0 < 1 - 2u_n < 1$<br>وبالتالي : $0 < u_n(1-2u_n) < \frac{1}{2}$<br>- ولدينا : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1$ ومنه $0 < \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$<br>- أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. | 0.5 |
| ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**<br>$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.<br>• **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ | 0.25 + 0.25 |
| 3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$<br>أ) **اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :**<br>• لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$<br>أي $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n+1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n+1} - 1} = \frac{\frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n - 2u_n - 1}{2u_n+1}}$<br>$v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n - 1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$ | 0.5 |

| | |
|---|---|
| | وحدها الأول $v_0=\dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{1}{3}$ |
| 0.25 | **ب) حساب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ :**<br>• لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\times 6^n$ |
| 0.5 | • **استنتاج أنّ : $u_n=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$**<br>- لدينا : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$<br>- ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\dfrac{v_n}{2v_n-3^n}$<br>إذن : $u_n=\dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه<br>$u_n==-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\dfrac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$ أي $u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$ |
| 0.5 | • حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1}{2}$ |
| 07 نقاط | **التمرين الرابع** |
| 0.25 + 0.25 | • **الجزء الأول :**<br>• لدينا : $g(x)=x^2-2\ln x$<br>**1- دراسة تغيرات الدالة $g$ :**<br>• **حساب النهايات :**<br>- $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2\ln x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$<br>- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ |
| 0.25 | • **حساب المشتقة :**<br>$g'(x)=2x-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$ |
| 0.25 | • **دراسة إشارة المشتقة :** |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |



- **جدول التغيرات :** — 0.5

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2- استنتاج إشارة** $g(x)$: — 0.25

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ |

- **الجزء الثاني :** — 0.25 + 0.25

- لدينا : $f(x)=1-x-\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$

**1- أ) حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-x-\dfrac{2}{x}(1+\ln x)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2}{x}(1+\ln x)\right)=-\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-x-\dfrac{2}{x}(1+\ln x)\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-x-\dfrac{2}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$

لأنَ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$

**ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x\in\,]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$ : — 0.5

- لدينا : $f'(x)=-1-2\left[-\dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}\right]=-1-2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

اي $f'(x)=\dfrac{-x^2+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{g(x)}{x^2}$

**ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة** $f$ : بما أنَ $g(x)>0$ فإنَ $f'(x)<0$ — 0.25

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ |

0.5

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

0.25

**2- أ) تبيان أنَ المستقيم $y=1-x$ : $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ :**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$.

0.5

**ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ :**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x=-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

- **جدول إشارة الفرق :**

$f(x)-y=0$ معناه $-\frac{2}{x}(1+\ln x)=0$

ومنه $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

0.5

**ج) تبيان أنَ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.41<\alpha<0.42$ :**

- لدينا $f$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41;0.42]$
- ولدينا : $f(0.41)=1-0.41-\frac{2}{0.41}(1+\ln 0.41)=0.06$

و $f(0.42)=1-0.42-\frac{2}{0.42}(1+\ln 0.42)=-0.05$

أي أنَ $f(0.41)\times f(0.42)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث

$0.41<\alpha<0.42$

| | |
|---|---|
| د) **تبيان أنَ المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$:**<br>• $(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه معامل توجيه $(T)$ يساوي $-1$ أي $f'(x)=-1$<br>ومنه $-\dfrac{x^2-2\ln x}{x^2}=-1$ أي $x^2-2\ln x=x^2$<br>وبالتالي $-2\ln x=0$ إذن $\ln x=0$ ومنه $x=1$<br>• $(T)$ مماس للمنحني $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ | 0.5 |
| • **كتابة معادلة ديكارتية للمماس** $(T)$:<br>$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+(-2)=-x+1-2=-x-1$<br>أي $(T): y=-x-1$ | 0.25 |
| • **الرسم :** | 0.75 |
| 4) **المناقشة البيانية لحلول المعادلة** $f(x)=m-x\ (m\in\mathbb{R})$ **:**<br>• حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$ الموازي لكل من $(T)$ و$(\Delta)$<br>• إذا كان $m\in\left]-\infty;-1\right[$ المعادلة ليس لها حل .<br>• إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا هو $x=1$ .<br>• إذا كان $m\in\left]-1;1\right[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .<br>• إذا كان $m\in\left[1;+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا . | 0.75 |

❀ انتهى تصحيح الموضوع الثاني مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح ☺

❀أساتذة المادة ❀



## اختبار في مادة الرياضيات

### التمرين الأول (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A, B, D$ التي لواحقها على الترتيب $a = 4 - i, b = 4 + i$ و $d = -i$.

و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega = 2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$.

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c = 1 + 2i$.

ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$.

د) بين أنَ النقط $A, B, C$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .

ه) عين مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون ، $\left|-i-z\right|^2 - \left|4-i-z\right|^2 = 16$.

### التمرين الثاني (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A\left(2,1,1\right), I\left(3,-1,0\right)$ و

$(P)$ مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق، $MA^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0$

1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة $(P)$ .

ب) بين أن المجموعة $(P)$ هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.

2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمر من النقطة $A$.

- تحقق أن نصف قطر سطح الكرة $(S)$ هو $R = \sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$

3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة $2x - y + z - 4 = 0$.

أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$.

ب) لتكن $B\left(2;-2;-2\right)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$.

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $B$ .

## ☝ التمرين الثالث ☺☺ ( 04 نقاط )

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7 .

3) $N$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 . حيث $x$ عدد طبيعي .

أ) عين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35 .

ب) أكتب العدد $N$ في النظام العشري .

## ☝ التمرين الرابع ☹ ☺ ( 07 نقاط )

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند 0 وعند $+\infty$ .

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما $x$ ، $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ .

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

**II.** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1<u_n<2$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## اختبار في مادة الرياضيات

### التمرين الأول ☹☺☹( 05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :
$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $C,\mathrm{B},\mathrm{A}$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=\overline{z_A}$, $\mathrm{z}_C=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

أ) أكتب الأعداد المركبة $z_A,z_B,z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي .

ب) بين أن النقط $C,\mathrm{B},\mathrm{A}$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) بين أنَ : $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\right)$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$؟

3) نعتبر العدد المركب $z_n$ الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث $n$ عدد طبيعي .

ونعرف العدد المركب $L_n$ بـ : $L_n=z_D\times z_n$.

أ) أكتب كلا من العددين $L_1,L_0$ على الشكل الجبري .

ب) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n=\left|L_n\right|$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

- بين أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- لتكن النقط $M_n,...,M_1,M_0$ صور الأعداد المركبة $L_n,...,L_1,L_0$ على الترتيب .

أحسب بدلالة $n$ المجموع ، $S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+...+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

### التمرين الثاني ☺☹☺ ( 04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$ و $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}=2\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{k}$ حيث $b,a$ عددان حقيقيان .

1. أ) بين أن النقط $C,B,A$ تعين مستويا $(ABC)$ .

ب) عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2. ليكن المستقيم $(\Delta)$ ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t;\quad(t\in\mathbb{R})\\z=4-t\end{cases}$

أ) بين أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ وأن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

ب) عين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

ج) أحسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.

د) بين أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.

3. أدرس تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

## التمرين الثالث ☹☹☹ ( 04 نقاط )

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5.

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3} - 2\times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث $n$ عدد طبيعي.

3) بين أن العدد 131 أولي .

4) عين الأعداد الطبيعة $n$ التي تحقق : $\begin{cases} 3m+7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$

حيث ، $d = PGCD(a,b)$ و $m = PPCM(a,b)$.

5) عين قيم $n$ بحيث يكون ، $7 < n < 15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.

## التمرين الرابع☹ ☺☹ ( 07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.( وحدة الطول $2cm$)

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**4)** حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم $(C_f)$.

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية :
$(E): f(x) = f(m)$

7) أ) عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث تكون الدالة $F$ المعرفة بـ : $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بـ $cm^2$ و بدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $x = \frac{1}{2}, y = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{\lambda \to -\infty} S(\lambda)$ .

**II.** نسمي $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$ .

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n; y_n)$.

أ) أحسب بدلالة $n$ كلا من $x_n$ و $y_n$ .

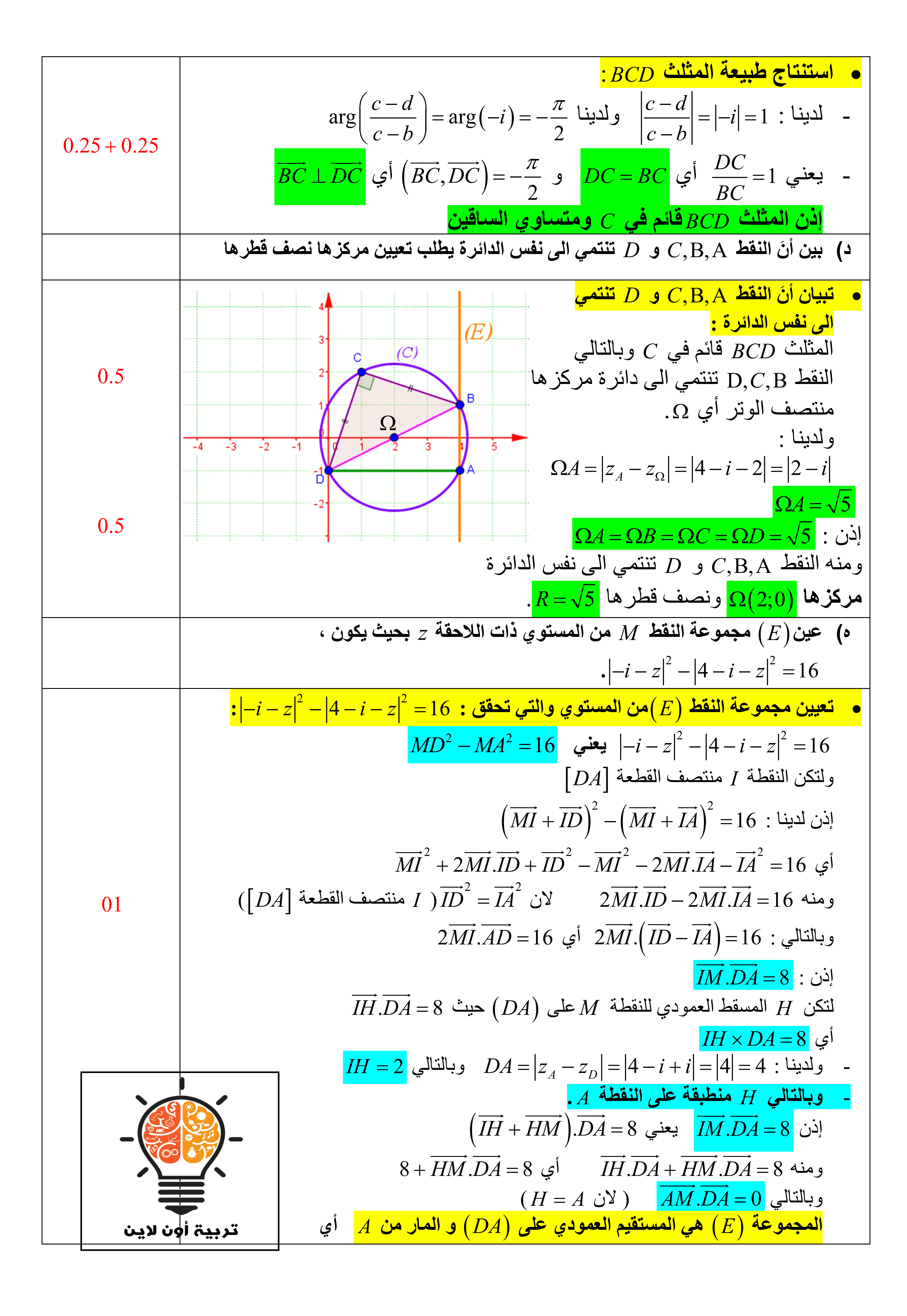
ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n\to+\infty} x_n$ .

ج) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n\to+\infty} y_n$

**✌بالتوفيق و النجاح ☹في البكالوريا☺☺ جوان 2015 ❀أستاذ المادة**

☜ تصحيح الموضوع التجريبي الأول للبكالوريا 2015 – الشعبة : رياضيات

| التصحيح | العلامة |
|---|---|
| ☜ **التمرين الأول :** | |
| 1) **حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :** $z^2-8z+17=0$. | |
| • **حل المعادلة :** $z^2-8z+17=0$<br>- حساب المميز $\Delta$ : $\Delta=(-8)^2-4(1)\times(17)=-4$<br>أي $\Delta=(2i)^2$<br>- المعادلة تقبل حلين هما :<br>$z_1=\frac{8-2i}{2}=4-i$ ، $z_2=\frac{8+2i}{2}=4+i$<br>مجموعة الحلول: $S=\{4-i;4+i\}$ | $0.5+2\times0.25$ |
| 2) **في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A,B,D$ التي لواحقها على الترتيب $a=4-i, b=4+i$ و $d=-i$.**<br>**و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$**<br>أ) **بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل :** $z'=iz+2-2i$. | |
| • **تبيان أن العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل :** $z'=iz+2-2i$:<br>- العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$<br>أي $z'-2=i(z-2)$ ومنه $z'=i(z-2)+2=iz+2-2i$<br>**إذن** $z'=iz+2-2i$ | 0.75 |
| ب) **تحقق أنَ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي** $c=1+2i$ | |
| • **التحقق أن لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي** $c=1+2i$:<br>• لدينا : $R(B)=C$ يعني<br>$c=i\times b+2-2i=i(4+i)+2-2i=4i-1+2-2i=1+2i$<br>$c=1+2i$ | 0.25 |
| ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$. | |
| • **تبيان أن** $\frac{c-d}{c-b}=-i$:<br>- لدينا : $\frac{c-d}{c-b}=\frac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)}=\frac{1+3i}{-3+i}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$<br>ومنه $\frac{c-d}{c-b}=\frac{-3-i-9i+3}{9+1}=\frac{-10i}{10}=-i$ | 0.5 |

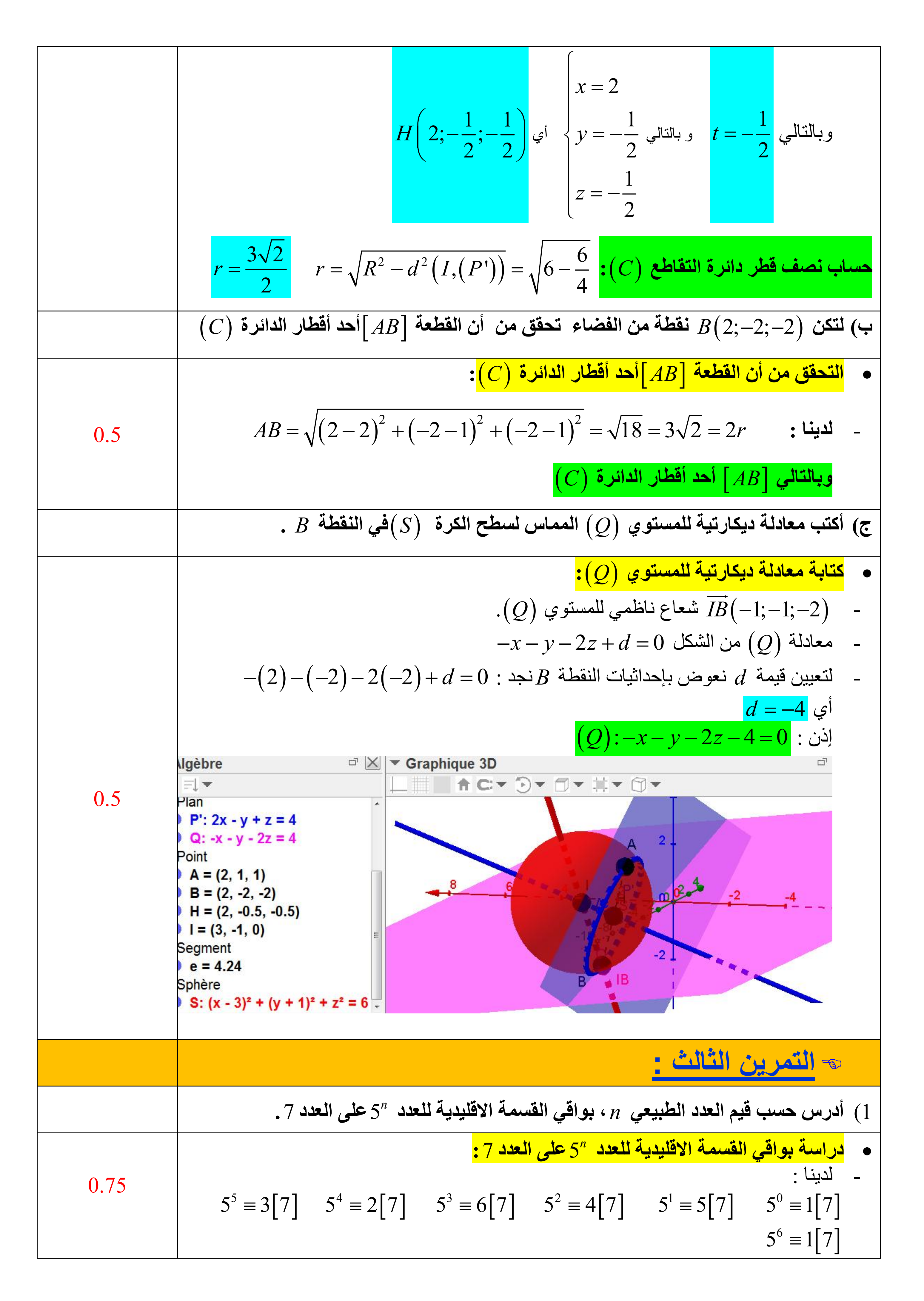


| | |
|---|---|
| 0.25 + 0.25 | • **استنتاج طبيعة المثلث** $BCD$ :<br>- لدينا : $\left\|\frac{c-d}{c-b}\right\|=\|-i\|=1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$<br>- يعني $\frac{DC}{BC}=1$ أي $DC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$<br>**إذن المثلث** $BCD$ **قائم في** $C$ **ومتساوي الساقين** |
| | **د) بين أنَ النقط** $C,B,A$ **و** $D$ **تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها** |
| 0.5<br><br>0.5 | • **تبيان أنَ النقط** $C,B,A$ **و** $D$ **تنتمي الى نفس الدائرة :**<br>المثلث $BCD$ قائم في $C$ وبالتالي النقط $D,C,B$ تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي $\Omega$.<br>ولدينا :<br>$\Omega A=\|z_A-z_\Omega\|=\|4-i-2\|=\|2-i\|$<br>$\Omega A=\sqrt{5}$<br>إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{5}$<br>ومنه النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة<br>**مركزها** $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$. |
| | **ه) عين** $(E)$ **مجموعة النقط** $M$ **من المستوي ذات اللاحقة** $z$ **بحيث يكون ،**<br>$\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$. |
| 01 | • **تعيين مجموعة النقط** $(E)$ **من المستوي والتي تحقق :** $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$:<br>$\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$ **يعني** $MD^2-MA^2=16$<br>ولتكن النقطة $I$ منتصف القطعة $[DA]$<br>إذن لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=16$<br>أي $\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2-\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}^2=16$<br>ومنه $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=16$ لأن $\overrightarrow{ID}^2=\overrightarrow{IA}^2$ ( $I$ منتصف القطعة $[DA]$)<br>وبالتالي : $2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)=16$ أي $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AD}=16$<br>إذن : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$<br>لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $M$ على $(DA)$ حيث $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}=8$<br>أي $IH\times DA=8$<br>- ولدينا : $DA=\|z_A-z_D\|=\|4-i+i\|=\|4\|=4$ وبالتالي $IH=2$<br>- **وبالتالي** $H$ **منطبقة على النقطة** $A$.<br>إذن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ يعني $\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{DA}=8$<br>ومنه $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $8+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$<br>وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA}=0$ ( لأن $H=A$ )<br>أي **المجموعة** $(E)$ **هي المستقيم العمودي على** $(DA)$ **و المار من** $A$ |

تربية أون لاين

| الحل | العلامة |
|---|---|
| $(E)=(AB)$<br>☜ أوبطريقة أخرى :<br>$\lvert -i-z\rvert^2-\lvert 4-i-z\rvert^2=16$ يعني $\lvert -i-x-iy\rvert^2-\lvert 4-i-x-iy\rvert^2=16$<br>ومنه : $\lvert -x+i(-1-y)\rvert^2-\lvert 4-x+(-1-y)\rvert^2=16$<br>أي $(-x)^2+(-1-y)^2-(4-x)^2-(-1-y)^2=16$ ومنه<br>$x^2-16+8x-x^2=16$<br>ومنه : $8x=32$<br>**وبالتالي :** $x=4$ **المجموعة** $(E)$ **هي المستقيم ذي المعادلة** $x=4$ **العمودي على** $(x'x)$ **والمار من النقطة** $A$ | |
| ☜ **التمرين الثاني :** | |
| **في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **نعتبر النقطتين**<br>$I(3,-1,0),A(2,1,1)$ **و** $(P)$ **مجموعة النقط** $M(x,y,z)$ **من الفضاء التي تحقق،**<br>$MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ | |
| **1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة** $(P)$ **.** | |
| • **تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة** $(P)$ **:**<br>- **لدينا :** $AA^2-\overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AI}=0$ ومنه $A\in(P)$ | 0.5 |
| **ب) بين أن المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $x-2y-z+1=0$ **معادلة ديكارتية له.** | |
| • **تبيان أن المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $x-2y-z+1=0$ **معادلة ديكارتية له:**<br>- **لدينا :** $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ يعني $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$<br>**ومنه** $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI})=0$ أي $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM})=0$<br>**وبالتالي** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=0$<br>**المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $\overrightarrow{IA}$ **شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A**<br>- **تعيين معادلة ديكارتية للمستوى** $(P)$**:**<br>لدينا : $\overrightarrow{AI}(1;-2;-1)$<br>معادلة $(P)$ **من الشكل** $x-2y-z+d=0$<br>- **تعيين قيمة** $d$ : نعوض بإحداثيات النقطة A **نجد :** $2-2(1)-1+d=0$<br>**ومنه** $d=1$ **أي معادلة** $(P)$ **هي** $x-2y-z+1=0$ | 0.5 |

| | |
|---|---|
| | 2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمر من النقطة $A$. <br> ▪ تحقق أن نصف قطر سطح الكرة $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ |
| 0.5 <br> 0.5 | • **التحقق أن نصف قطر $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$:** <br> - لدينا : $R=AI=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$. <br> - **تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$:** <br> $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=6$ |
| | 3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$. <br> أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$. |
| 0.25 | • **تبيان أن $(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$:** <br> - لدينا : $d(I,(P'))=\dfrac{\lvert 2(3)-(-1)+0-4\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{\lvert 3\rvert}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ <br> أي لدينا : $d(I,(P'))<R$ ومنه $(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ |
| 0.75 | • **تعيين مركز الدائرة $(C)$ ونصف قطرها :** <br> - **تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المار من $I$ مركز سطح الكرة $(S)$ و العمودي على $(P')$:** <br> $(\Delta):\begin{cases}x=2t+3\\ y=-t-1;(t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$ <br> - **تعيين $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(P')$:** <br> نحل لجملة : $\begin{cases}x=2t+3\\ y=-t-1\\ z=t\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ <br> إذن : $2(2t+3)-(-t-1)+t-4=0$ ومنه $6t+3=0$ |



| | |
|---|---|
| | وبالتالي $t=-\dfrac{1}{2}$ و بالتالي $\begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ أي $H\left(2;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ <br> **حساب نصف قطر دائرة التقاطع $(C)$:** $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P')\right)}=\sqrt{6-\dfrac{6}{4}}$ $\quad r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| | **ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** |
| 0.5 | • **التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$:** <br> - **لدينا :** $AB=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=2r$ <br> **وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** |
| | **ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $B$ .** |
| 0.5 | • **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$:** <br> - $\overrightarrow{IB}(-1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(Q)$. <br> - معادلة $(Q)$ من الشكل $-x-y-2z+d=0$ <br> - لتعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $B$ نجد : $-(2)-(-2)-2(-2)+d=0$ <br> أي $d=-4$ <br> إذن : $(Q):-x-y-2z-4=0$ <br>  |
| | ☜ **التمرين الثالث :** |
| | **1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 .** |
| 0.75 | • **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 :** <br> - لدينا : <br> $5^0\equiv1[7]$ $\quad 5^1\equiv5[7]$ $\quad 5^2\equiv4[7]$ $\quad 5^3\equiv6[7]$ $\quad 5^4\equiv2[7]$ $\quad 5^5\equiv3[7]$ <br> $5^6\equiv1[7]$ |

- بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها $p=6$
- من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :

| $n$ | $6k$ | $6k+1$ | $6k+2$ | $6k+3$ | $6k+4$ | $6k+5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^n \equiv ...[7]$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 |

0.75

2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7

- **تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$ :**

- لدينا : $19\equiv 5[7]$ ومنه $19^{6n+3}\equiv 5^{6n+3}[7]$ أي $19^{6n+3}\equiv 6[7]$
- ولدينا : $5^{6n+4}\equiv 2[7]$
- إذن : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$ يكافئ $6-2+4n^2+1\equiv 0[7]$

أي $4n^2+5\equiv 0[7]$

ومنه : $4n^2\equiv -5[7]$ إذن $4n^2\equiv 2[7]$

وبالتالي : $n^2\equiv 4[7]$

| $n\equiv ...[7]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2\equiv ...[7]$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 4 | 1 |

- ومنه : $n^2\equiv 4[7]$ يعني $n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]$

أي $n=7\alpha+2$ أو $n=7\alpha+5$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

01

3) $N$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث $x$ عدد طبيعي .

أ) عين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35.

- **تعيين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35:**

- لدينا : $N=1\times 5^3+x\times 5^2+x\times 5^1+0\times 5^0=125+30x$ مع $x<5$

وبالتالي $N$ يقبل القسمة على 35 يعني $N\equiv 0[35]$

أي أن $N\equiv 0[7]$ لان $N\equiv 0[5]$ و 5 أولي مع 7

وبالتالي $N\equiv 0[7]$ يعني $125+30x\equiv 0[7]$

ومنه : $6+2x\equiv 0[7]$

يعني $2x\equiv -6[7]$ أي $2x\equiv 1[7]$

وبالتالي : $x\equiv 4[7]$

أي $x=7k+4$ مع $x<5$ **إذن من أجل $k=0$ نجد $x=4$**

01

ب) أكتب العدد $N$ في النظام العشري .

- **كتابة العدد $N$ في النظام العشري:**

$N=125+30(4)=245$ $N=245$

0.5

## ☜ التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

| | |
|---|---|
| | |
| | **I.** **1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند 0 وعند $+\infty$.** |
| $0.25+0.25$ | • حساب نهايتي الدالة $f$ : <br> - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$ <br> - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$ |
| | **2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ ، $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم** <br> **استنتج اتجاه تغير الدالة $f$** |
| $0.75$ | • **حساب** $f'(x)$ : <br> $f'(x)=1+3\times\frac{\frac{2x(3x)-3(x^2+2)}{(3x)^2}}{\frac{x^2+2}{3x}}=1+3\times\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{3x}{x^2+2}$ <br> أي $f'(x)=1+\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{9x}{x^2+2}=1+\frac{3x^2-6}{x(x^2+2)}=\frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)}$ <br> وبالتالي : $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ |
| $0.5$ | • **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :** <br> $f'(x)=0$ يعني $\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}=0$ <br> ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ ( ليس لها حل لأن $\Delta=16-24=-8<0$ ) مع <br> $x\in]0;+\infty[$ <br> ومنه $x=1$ <br> إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لأن $x(x^2+2)>0$ |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+4x+6$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- الدالة $f$ متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

0.5

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$.

01

- **دراسة الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ :**

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)-x=3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $f(x)-y=0$ يعني $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$ أي $\frac{x^2+2}{3x}=1$

- وبالتالي $x^2+2=3x$

إذن : $x^2-3x+2=0$

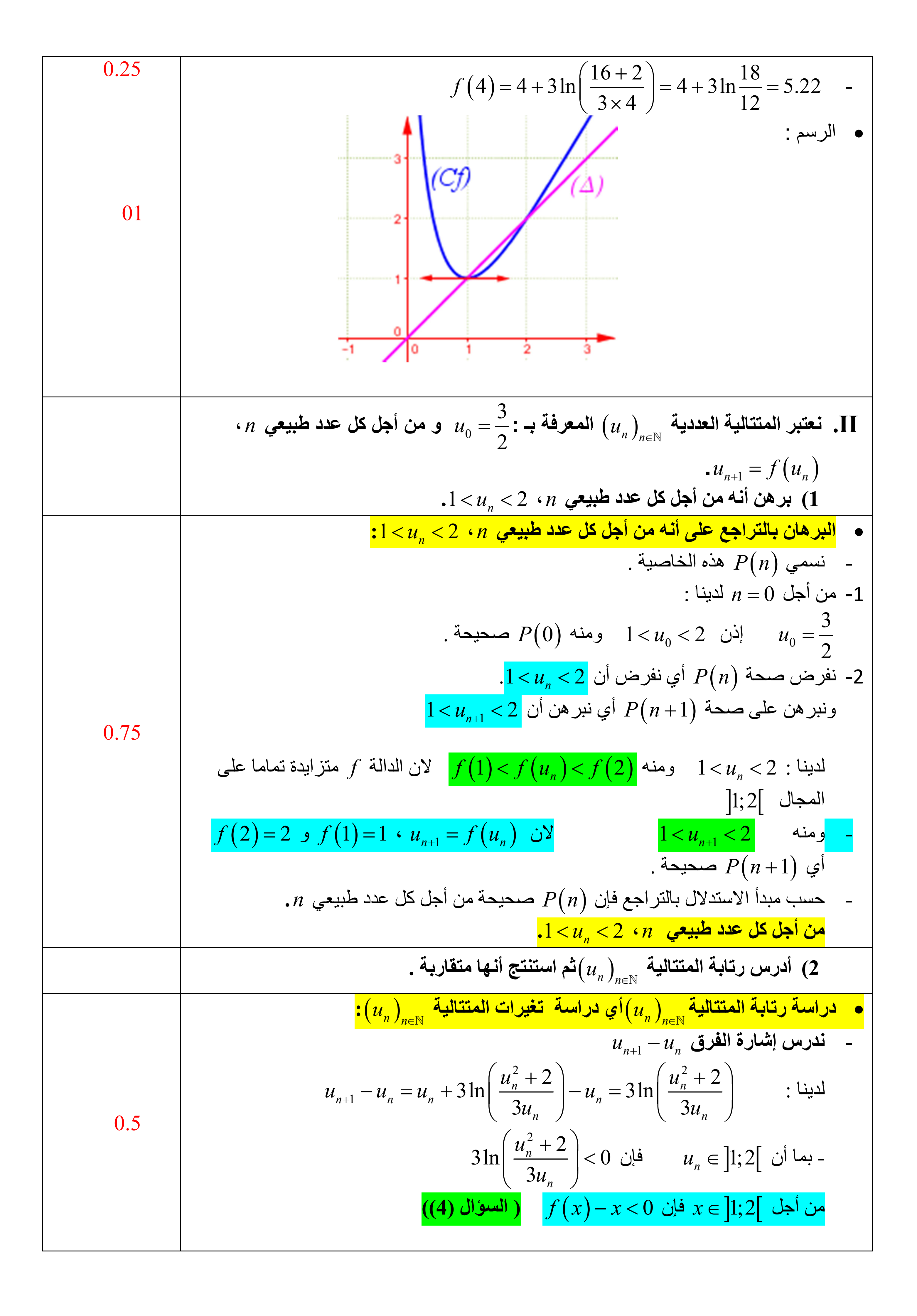
- حساب المميز : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ ، $x_1=\frac{3+1}{2}=2$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | ‖ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

- **حساب $f(4)$ :**




| | |
|---|---|
| - $f(4)=4+3\ln\left(\frac{16+2}{3\times4}\right)=4+3\ln\frac{18}{12}=5.22$<br>• الرسم : | 0.25<br><br>01 |
| **II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$،**<br>**$u_{n+1}=f(u_n)$.**<br>**1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.** | |
| • **البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$:**<br>- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>1- من أجل $n=0$ لدينا :<br>$u_0=\frac{3}{2}$ إذن $1<u_0<2$ ومنه $P(0)$ صحيحة .<br>2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1<u_n<2$.<br>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1<u_{n+1}<2$<br>لدينا : $1<u_n<2$ ومنه $f(1)<f(u_n)<f(2)$ لان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;2[$<br>- ومنه $1<u_{n+1}<2$ لان $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(1)=1$ و $f(2)=2$<br>أي $P(n+1)$ صحيحة .<br>- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.<br>**من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.** | 0.75 |
| **2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .** | |
| • **دراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**<br>- **ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$**<br>لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n+3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)-u_n=3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)$<br>- بما أن $u_n\in]1;2[$ فإن $3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)<0$<br>من أجل $x\in]1;2[$ فإن $f(x)-x<0$ **( السؤال (4))** | 0.5 |

| | |
|---|---|
| **وبالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما .** | |
| • **استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة :**<br>- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 . | 0.5 |
| **3) عين نهاية المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. | |
| • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ | 0.25 |



☜ تصحيح الموضوع التجريبي الثاني          الشعبة : رياضيات

| العلامة | التصحيح |
|---|---|
| 05 نقاط | ☜ التمرين الأول ☺☺☺ |
| | 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$. |
| 0.5 | ▪ حل المعادلة $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$: <br> $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ يكافئ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z^2+2z+4=0$ <br> ▪ حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ <br> حساب المميز : $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(4)=12-16=-4=(2i)^2$ <br> المعادلة تقبل حلين هما : $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+i, z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ |
| 0.5 | ▪ حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ <br> حساب المميز : $\Delta=(2)^2-4(1)(4)=4-16=-12=(2\sqrt{3}i)^2$ <br> المعادلة تقبل حلين هما : $z''=\overline{z'}=-1+i\sqrt{3}, z'=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ |
| | ▪ مجموعة حلول المعادلة $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ : <br> $S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\}$ |
| | 2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A, B, C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i, z_B=\overline{z_A}, z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$. <br> أ) أكتب الأعداد المركبة $z_A, z_B, z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي |
| 0.5 | ▪ كتابة الأعداد $z_A, z_B, z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي: <br> ▪ لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i$ <br> ▪ حساب الطويلة : $\|z_A\|=\|\sqrt{3}+i\|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ <br> ▪ تعيين عمدة للعدد $z_A$ : نضع $\theta=\arg(z_A)$ <br> لدينا : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ <br> ▪ ولدينا : $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ |
| | ▪ $z_C=-1-i\sqrt{3}$ <br> حساب الطويلة : $\|z_C\|=\|-1-i\sqrt{3}\|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | تعيين عمدة للعدد $z_C$ : نضع : $\theta' = \arg(z_C)$<br>لدينا : $\begin{cases} \cos\theta' = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ |
| | ▪ ولدينا : $z_D = \overline{z_C} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ |
| | ب) بين أن النقط $C, B, A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ يطلب تعيين عناصرها . |
| 0.25 | ▪ تبيان أن النقط $C, B, A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ :<br>▪ لدينا : $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert = 2$ أي $OA = OB = OC = OD = 2$<br>ومنه النقط $C, B, A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ ذات المركز $O$ و نصف قطرها $r = 2$ |
| | ج ) بين أنّ : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$. |
| 0.5 | ▪ تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$:<br>▪ لدينا:<br>$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = \frac{i^2(1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}$<br>أي $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{i\left(i(1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})\right)}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = i \times \frac{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = i$<br>إذن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$<br>▪ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$:<br>$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ |
| | ▪ ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$؟ |
| 0.25 | ▪ الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$:<br>$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$ يعني $(AC) \perp (BD)$ |
| | 3) نعتبر العدد المركب $z_n$ الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث $n$ عدد طبيعي .<br>ونعرف العدد المركب $L_n$ بـ : $L_n = z_D \times z_n$.<br>أ) أكتب كلا من العددين $L_1, L_0$ على الشكل الجبري . |
| | ▪ كتابة كلا من العددين $L_1, L_0$ على الشكل الجبري :<br>لدينا : $L_0 = z_D \times z_0 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^0} \times e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$ |

| المحتوى | العلامة |
|---|---|
| $L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>إذن $L_0 = -1 + i\sqrt{3}$    $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0.5 |
| **ب) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \lvert L_n \rvert$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.**<br>▪ **بين أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .**<br>▪ **لتكن النقط $M_0, M_1, ..., M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, ..., L_n$ على الترتيب .**<br>**أحسب بدلالة $n$ المجموع ، $S_n = \lVert \overrightarrow{OM_0} \rVert + \lVert \overrightarrow{OM_1} \rVert + ... + \lVert \overrightarrow{OM_n} \rVert$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$** | |
| ▪ **تبيان أن المتتالية $(u_n)$ هندسية :**<br>▪ لدينا : $u_n = \lvert L_n \rvert = \lvert z_D \times z_n \rvert = \lvert z_D \rvert \times \lvert z_n \rvert = 2 \times \frac{1}{2^n}$<br>▪ إذن : $u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}u_n$<br>▪ أي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$<br>**ومنه $(u_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول** $u_0 = \lvert L_0 \rvert = \lvert -1 + i\sqrt{3} \rvert = 2$ | 0.5 |
| ▪ **حساب المجموع $S_n = \lVert \overrightarrow{OM_0} \rVert + \lVert \overrightarrow{OM_1} \rVert + ... + \lVert \overrightarrow{OM_n} \rVert$ :**<br>▪ **لدينا :** $S_n = \lVert \overrightarrow{OM_0} \rVert + \lVert \overrightarrow{OM_1} \rVert + ... + \lVert \overrightarrow{OM_n} \rVert = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$<br>$S_n = 2 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$<br>$S_n = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ | 0.5 |
| ▪ **حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ :**<br>$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ | 0.25 |
| **التمرين الثاني ☺☺☺** | **04 نقاط** |
| **الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط**<br>$A(1;2;3), B(0;1;4), C(-1;-3;2)$ **و** $D(4;-2;5)$ **و الشعاع** $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$<br>**حيث $a, b$ عددان حقيقيان .**<br>**1. أ) بين أن النقط $A, B, C$ تعين مستويا $(ABC)$ .** | |
| ▪ **تبيان أن النقط $A, B, C$ تعين مستويا :**<br>▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ | $0.25 + 0.25$ |

| | |
|---|---|
| 0.25 | لدينا : $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{1}$<br>إذن :لا يوجد عدد حقيقي $k$ بحيث يكون ، $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط $C,B,A$ ليست في استقامية فهي تعين مستويا. |
| | **ب)عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.** |
| 0.5 | ▪ **تعيين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$:**<br>▪ لدينا : $\vec{n}(2;a;b)$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$<br>يكافئ $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2\times(-1)-a+b=0\\ 2(-2)-5a-b=0\end{cases}$<br>يكافئ $\begin{cases}-a+b-2=0...(1)\\ -5a-b-4=0...(2)\end{cases}$<br>▪ بالجمع نجد : $-a+b-2-5a-b-4=0$ ومنه $-6a=6$ أي $a=-1$<br>▪ من أجل $a=-1$ بالتعويض في المعادلة $(1)$ نجد : $b=1$<br>أي $\vec{n}(2;-1;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ |
| 0.5 | ▪ **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$:**<br>▪ معادلة $(ABC)$ من الشكل $2x-y+z+d=0$<br>▪ تعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $A(1;2;3)$ نجد : $2(1)-2+3+d=0$<br>ومنه $d=-3$<br>معادلة للمستوي $(ABC)$: $2x-y+z-3=0$ |
| | **2. ليكن المستقيم $(\Delta)$ ذي التمثيل الوسيطي:** $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t;\quad (t\in\mathbb{R})\\ z=4-t\end{cases}$<br>**أ) بين أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ وأن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.** |
| 0.25 | ▪ **تبيان أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$:**<br>▪ **من أجل** $(x;y;z)=(4;-2;5)$ بالتعويض في الجملة السابقة نجد: $\begin{cases}4=2-2t\\ -2=-1+t\\ 5=4-t\end{cases}$<br>**ومنه** $\begin{cases}2t=-2\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(\Delta)$ |

| | |
|---|---|
| ▪ تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$:<br>▪ لدينا : $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$<br>▪ ولدينا : $\vec{u}(-2;1;-1)$ شعاع توجيه $(\Delta)$<br>▪ نلاحظ أن : $\vec{n}=-\vec{u}$ ومنه $\vec{n}\parallel\vec{u}$ أي $(\Delta)\perp(ABC)$ | 0.25 |
| ب) عين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$: | |
| ▪ تعيين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$:<br>▪ إحداثيات النقطة $H$ هي حل للجملة : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$<br>▪ أي $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$ ومنه $-6t+6=0$<br>وبالتالي $t=1$<br>إذن: $H(0;0;3)$ | 0.5 |
| ج) أحسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$. | |
| ▪ حساب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$:<br>▪ **لدينا :** $d(D,(ABC))=DH=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$<br>▪ **أو بطريقة أخرى :** $d(D,(ABC))=\frac{\lvert 2(4)-(-2)+5-3\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{\lvert 12\rvert}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$<br>$d(D,(ABC))=2\sqrt{6}$ | 0.5 |
| د) بين أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$. | |
| ▪ تبيان أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$:<br>▪ $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ يعني $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$<br>لدينا : $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$<br>ومنه النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ | 0.25 |
| 3) أدرس تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$. | |
| ▪ دراسة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$:<br>▪ لدينا معادلة للمستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$ ومنه شعاع ناظمي له هو $\vec{k}(0;0;1)$<br>▪ ولدينا شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ هو $\vec{u}(-2;1;-1)$.<br>▪ إذن : $\vec{k}.\vec{u}=0\times(-2)+0\times1+1\times(-1)=-1\neq0$ ومنه $(\Delta)$ لا يوازي $(O,\vec{i},\vec{j})$<br>▪ أي $(\Delta)$ يقطع $(O,\vec{i},\vec{j})$ في نقطة $F$ . | 0.25 |

- إحداثيات النقطة $F$ هي حل للجملة : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \\ z = 0 \end{cases}$

أي $4-t=0$ ومنه $t=4$

- من أجل $t=4$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد :

$\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ ومنه $F(-6;3;0)$

**0.25**

## ☜ التمرين الثالث ☹☺☹ — 04نقاط

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5.

- **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5:**
- لدينا :

$2^0 \equiv 1[5]$ $\quad 2^1 \equiv 2[5]$ $\quad 2^2 \equiv 4[5]$ $\quad 2^3 \equiv 3[5]$ $\quad 2^4 \equiv 1[5]$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p=4$ .

من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :

| $n$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| باقي قسمة العدد $2^n$ على 5 | 1 | 2 | 4 | 3 |

**$0.5+0.5$**

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3} - 2\times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث $n$ عدد طبيعي.

- **تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3} - 2\times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}\right)$ على 5:**
- لدينا : $2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3} \equiv 3[5]$
- ولدينا : $2016^{8n} \equiv 1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n} \equiv 1[5]$
- و $2014^{2n+1} \equiv 4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1} \equiv \left(2^2\right)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2}[5]$

وبالتالي $2014^{2n+1} \equiv 4[5]$

- إذن $2017^{4n+3} - 2\times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 3-2\times 1+4[5]$

ومنه $2017^{4n+3} - 2\times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 0[5]$

**0.75**

| | |
|---|---|
| أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5 هو 0 | |
| 3) بين أن العدد 131 أولي . | |
| ▪ **تبيان أن العدد 131 أولي :**<br>**لدينا :** $\sqrt{131}=11.45$<br>▪ العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الاعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$<br>$131\equiv1[2],131\equiv2[3],131\equiv1[5],131\equiv5[7],131\equiv10[11]$<br>ومنه العدد 131 أولي . | 0.5 |
| 4) **عين الأعداد الطبيعية $n$ التي تحقق :** $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ab=5m\end{cases}$<br>**حيث ،** $d=PGCD(a,b)$ **و** $m=PPCM(a,b)$ **.** | |
| ▪ **تعيين الأعداد $n$ التي تحقق :** $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ab=5m\end{cases}$<br>▪ لدينا $ab=5m$ ولدينا $ab=md$ ومنه $d=5$<br>▪ نضع : $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $a'\wedge b'=1$ ( $a'$ أولي مع $b'$ )<br>▪ إذن $ab=5m$ يعني $5a'\times5b'=5m$ أي $m=5a'b'$<br>وبالتالي : $3m+7d=2^n-48$ معناه $3\times5a'b'+7\times5=2^n-48$<br>أي $5(3a'b'+7)=2^n-48$<br>$3a'b'+7$ **طبيعي يعني** $2^n-48\equiv0[5]$ **ومنه** $2^n-3\equiv0[5]$<br>أي $2^n\equiv3[5]$ وبالتالي : $n=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$ | 0.75 |
| 5) **عين قيم $n$ بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.** | |
| ▪ **تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون ، $7<n<15$ :**<br>▪ لدينا : $7<n<15$ معناه $7<4k+3<15$ أي $4<4k<12$<br>▪ وبالتالي : $1<k<3$<br>إذن $k=2$ ومنه $n=11$ | 0.5 |
| ▪ **استنتاج الثنائيات $(a;b)$ :**<br>▪ من أجل $n=11$ لدينا :<br>$5(3a'b'+7)=2^{11}-48$ ومنه $5(3a'b'+7)=2000$<br>أي $3a'b'+7=400$<br>ومنه $a'b'=131$<br>وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a';b')$ $\{(131;1),(1;131)\}$<br>ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ $\{(655;5),(5;655)\}$ | 0.5 |
| **التمرين الرابع ☹☺☺** | **( 07 نقاط)** |
| **نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :** $f(x)=(1-2x)e^{2x}$<br>**نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$**.( وحدة الطول $2cm$ )** | |

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

▪ **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$ :**

▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0, \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x}=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

$0.25+0.25$

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

▪ **حساب المشتقة :**

▪ $f'(x)=-2e^{2x}+(1-2x)\times 2e^{2x}=(-2+2-4x)e^{2x}=-4xe^{2x}$

$f'(x)=-4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

$0.25$

▪ **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**

▪ **جدول اشارة المشتقة :**

شارة $f'(x)$ من اشارة $-x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

▪ الدالة $f$ **متزايدة على المجال** $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

$0.25$

3) **شكل جدول تغيرات الدالة $f$.**

▪ **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

$0.5$

4) **حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.**

▪ **حل المعادلة $f(x)=0$ :**

▪ $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$

يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$

يكافئ $x=\dfrac{1}{2}$

▪ **استنتاج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل:**

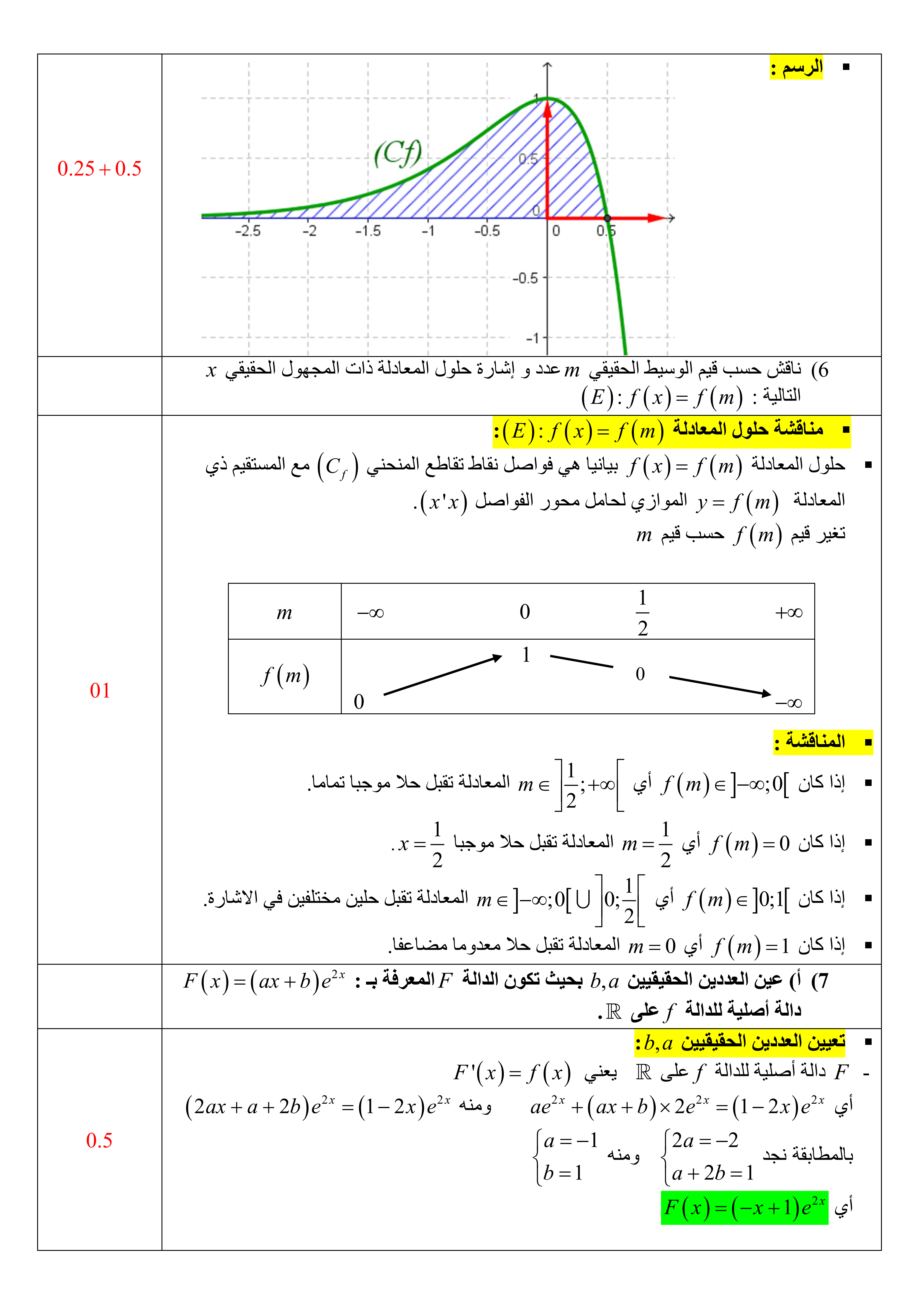
$(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$

$0.25$

5) **أحسب $f(1)$ ثم أرسم $(C_f)$.**

▪ **حساب $f(1)$ :**

▪ $f(1)=(1-2(1))e^{2\times 1}=-e^{2}=-7.39$



▪ **الرسم :**



$0.25+0.5$

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $(E): f(x)=f(m)$

▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:**

▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.

تغير قيم $f(m)$ حسب قيم $m$

| $m$ | $-\infty$     $0$     $\frac{1}{2}$     $+\infty$ |
|---|---|
| $f(m)$ | $0$ ↗ $1$ ↘ $0$ ↘ $-\infty$ |

▪ **المناقشة :**

▪ إذا كان $f(m)\in\left]-\infty;0\right[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.

▪ إذا كان $f(m)\in\left]0;1\right[$ أي $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

$01$

7) أ) **عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث تكون الدالة $F$ المعرفة بـ :** $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ **دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.**

▪ **تعيين العددين الحقيقيين $b,a$:**

- $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$

أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$

$0.5$

| | |
|---|---|
| | ب) أحسب بـ $cm^2$ و بدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و<br>المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$ . |
| 0.5 | ▪ **حساب $S(\lambda)$:**<br>$f$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي :<br>$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$<br>أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$<br>ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$ |
| 0.25 | ▪ **حساب $\lim_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$ :**<br>$\lim_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان<br>$\lim_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$ , $\lim_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$ |
| | **II. نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},\dots, f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$.**<br>**1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ .** |
| 0.75 | ▪ **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$**<br>- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>**1)** من أجل $n=1$ لدينا :<br>$f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$<br>ومنه $P(1)$ صحيحة .<br>**2)** نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$<br>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن<br>$f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$<br>- لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$<br>ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$<br>أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$<br>ومنه $P(n+1)$ صحيحة.<br>**3)** حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم. |
| | **2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ المنحنى $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة**<br>**المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.**<br>**أ) أحسب بدلالة $n$ كلا من $x_n$ و $y_n$ .** |

| | |
|---|---|
| ▪ حساب $x_n$ و $y_n$ بدلالة $n$:<br>- $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ يقبل مماسا يوازي $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$<br>أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$<br>وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$<br>من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا :<br>$y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$<br>أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ | $0.25+0.25$ |
| ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ . | |
| ▪ تبيان أن $(x_n)$ متتالية حسابية :<br>- لدينا : $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$<br>ومنه $(x_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$.<br>- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ :<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$ | $0.5$ |
| ج) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ | |
| ▪ تبيان أن المتتالية $(y_n)$ هندسية :<br>- لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$<br>ومنه $(y_n)$ هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$.<br>- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ :<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لأن $-1<2e^{-1}<1$ | $0.5$ |

✌انتهى تصحيح الموضوع الثاني ❁ بالتوفيق ☺ والنجاح ☺☺ في البكالوريا ❁

## اختبار في مادة الرياضيات

### التمرين الأول ☹☺ (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $z^2-8z+17=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A, B, D$ التي لواحقها على الترتيب $a=4-i, b=4+i$ و $d=-i$.

و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'=iz+2-2i$.

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c=1+2i$.

ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$.

د) بين أنَ النقط $A, B, C$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .

ه) عين مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون ، $|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$.

### التمرين الثاني ☹ ☺ (04 نقاط )

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(2,1,1), I(3,-1,0)$ و




$(P)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق، $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$

1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة $(P)$ .

ب) بين أن المجموعة $(P)$ هي مستو $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية له.

2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمر من النقطة $A$.

▪ تحقق أن نصف قطرسطح الكرة $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$

3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$.

أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$.

ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$.

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $B$ .

## ☝ التمرين الثالث ☺☺ ( 04 نقاط )

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E): y' - 2y = -4x$

1) عين العددين الحقيقيين ~ و بحيث تكون الدالة ¨ المعرفة بـ: $(x) = \sim x +$ ¨ حلا للمعادلة $(E)$.

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E'): y' - 2y = 0$.

أ) بين أن الدالة $f$ حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة $(f -$ ¨ $)$ حلا للمعادلة $(E')$.

ب) حل المعادلة $(E')$ ثم استنتج حلول المعادلة $(E)$.

ج) عين حلا خاصا $f$ للمعادلة $(E)$ والذي يحقق ، $f(0) = 3$

## ☝ التمرين الرابع☹ ☺ ( 07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $0$ وعند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما $x$ ، $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = x$ .

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

**II.** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 < u_n < 2$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**
**وزارة التربية الوطنية**

**مديرية التربية لولاية الشلف** — **ثانوية بلحاج قاسم نورالدين**

**الشعبة: علوم تجريبية** — **الموضوع الثاني**

**إختبار في مادة الرياضيات**

---

**اختبار في مادة الرياضيات** — **المدة: 03ساعات**

---

**التمرين الأول :( 4.5 نقط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول $z$ : $z^2-2z+2=0$ .

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

لتكن النقط $K$ ، $L$ و $M$ والتي لواحقها على الترتيب $z_K=1+i$ ؛ $z_L=1-i$ و $z_M=-i\sqrt{3}$ .

أنشئ النقط $K$ ، $L$ و $M$ في المعلم السابق.

3-أ) تحقق أن $z_N$ لاحقة النقطة $N$ نظيرة النقطة $M$ بالنسبة للنقطة $L$ هي $2+i(\sqrt{3}-2)$ .

ب) نعتبر الدوران r الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث : $r(M)=A$ و $r(N)=C$ .

عيّن اللاحقتين $z_A$ و $z_C$ للنقطتين $A$ ، $C$ على الترتيب .

جـ) نعتبر الانسحاب $t$ الذي لاحقة شعاعه هي $2i$ حيث: $t(M)=D$ و $t(N)=B$ .

عيّن اللاحقتين $z_D$ و $z_B$ للنقطتين $B$ ، $D$ على الترتيب .

4-أ) بيّن أن النقطة $K$ هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمتين $[DB]$ و $[AC]$.

ب)بيّن أن : $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

**التمرين الثاني ( 4.5 نقط)**

I)لتكن المتتالية$(u_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<1$ .

2-أ) تحقق أنّ : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية$(u_n)$.

ب) بيّن أن$(u_n)$ متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

II) لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=-\frac{u_n-1}{2u_n}$

أ) بيّن أن المتتالية $(v_n)$هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) اكتب $v_n$ بدلالة $n$ و لستنتج $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب من جديد نهاية المتتالية $(u_n)$.

جـ) احسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n=v_0+v_1+......+v_n$ و $T_n=u_0+3u_1+9u_2+......+3^nu_n$

**التمرين الثالث ( 04 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ . نعتبر النقطتين $A(12\,;7\,;-13)$ ، $B(3\,;1\,;2)$ والمستوي $(P)$ الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{n}(3\,;2\,;-5)$ شعاع ناظمي له والمستوي $(P')$ ذو المعادلة الديكارتية $x+y-2z=0$ .

1) بيّن أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ شعاع توجيه له.

2) أثبت أن النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$ .

3) ليكن $(Q)$ المستوي والمعرف بالتمثيل الوسيطي : $t\;;\;\lambda\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=2t-2\lambda+6\\ y=2t+3\lambda+5\\ z=2t-6\end{cases}$

أ) بيّن أن المستويان $(P)$ و $(Q)$ متوازيان.

ب) تحقق أن المعادلة : $3x+2y-5z=58$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ .

جـ) لتكن $I$ منتصف القطعة $[BA]$ .

تحقق أنّ النقطة $I$ تنتمي للمستوي $(Q)$ ثم استنتج أن المستوي $(Q)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BA]$ .

4) لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$ .

أ) بيّن أن $(S)$ هي سطح كرة يطلب تحديد عناصرها المميزة .

ب) استنتج ان المستوي $(Q)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

**التمرين الرابع ( 07 نقاط)**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ .

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) علل وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$ والذي يحقق $g(\alpha)=0$

جـ) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ .

II- $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أن $f(\alpha)=2\alpha+3+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

3) بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيتّها.

4-أ- بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ معادلته $y=2x+1$ ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(d)$ .

ب- أنشئ المنحنى $(C_f)$ في المعلم السابق وعلى المجال $]-1,5\,;+\infty[$ (تعطى $f(-1,5)=4,72$ )

5) لتكن الدالة $h$ والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(x^2.e^x)$ .

بالستعمال مشتق دالة مركبة ، استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ ثم شكل جدول تغيراتها.

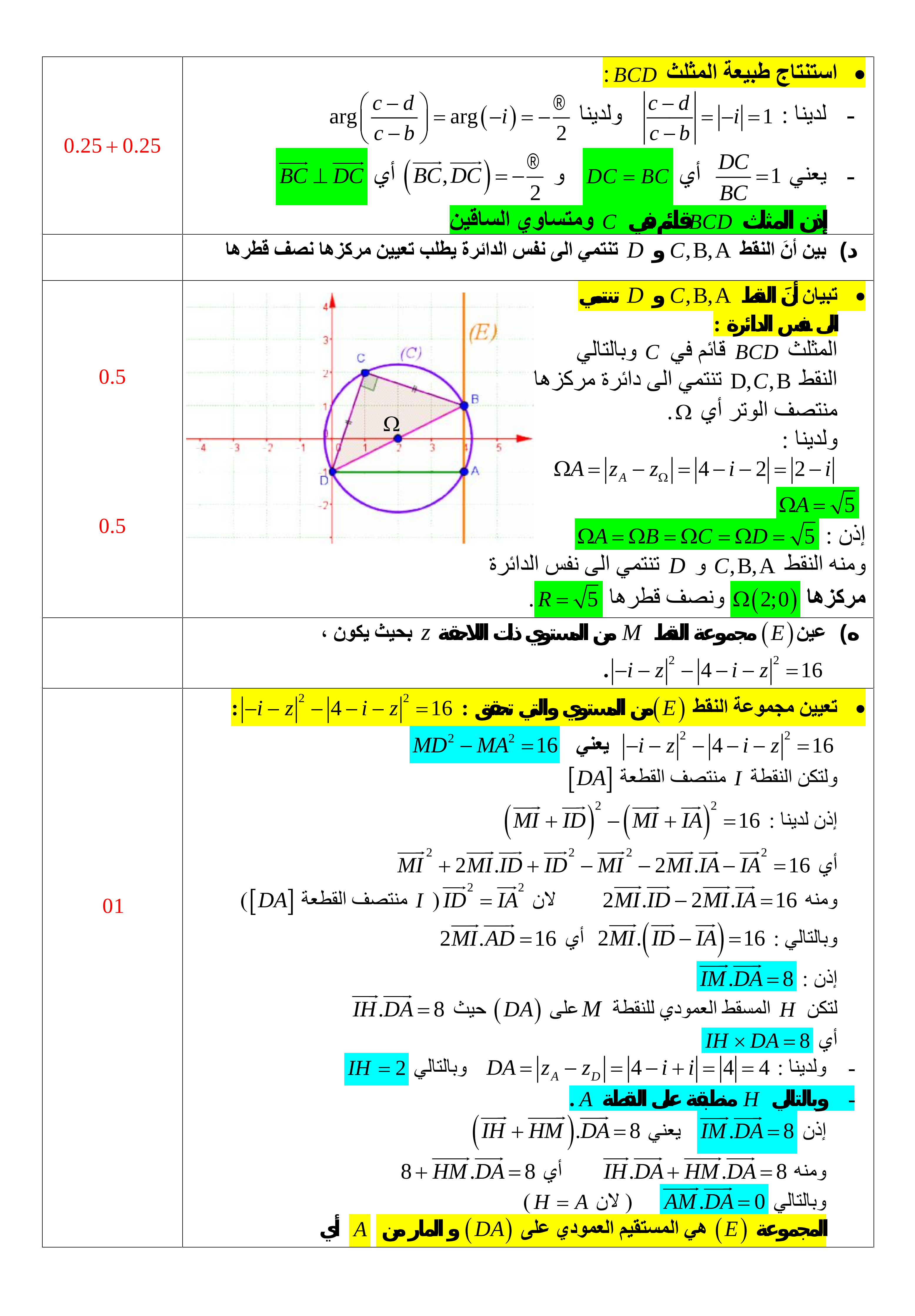
6) لتكن الدالة $k$ والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $k(x)=(ax+b)e^{-x}$ .

أـ عيّن العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث تكون $k$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto-xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

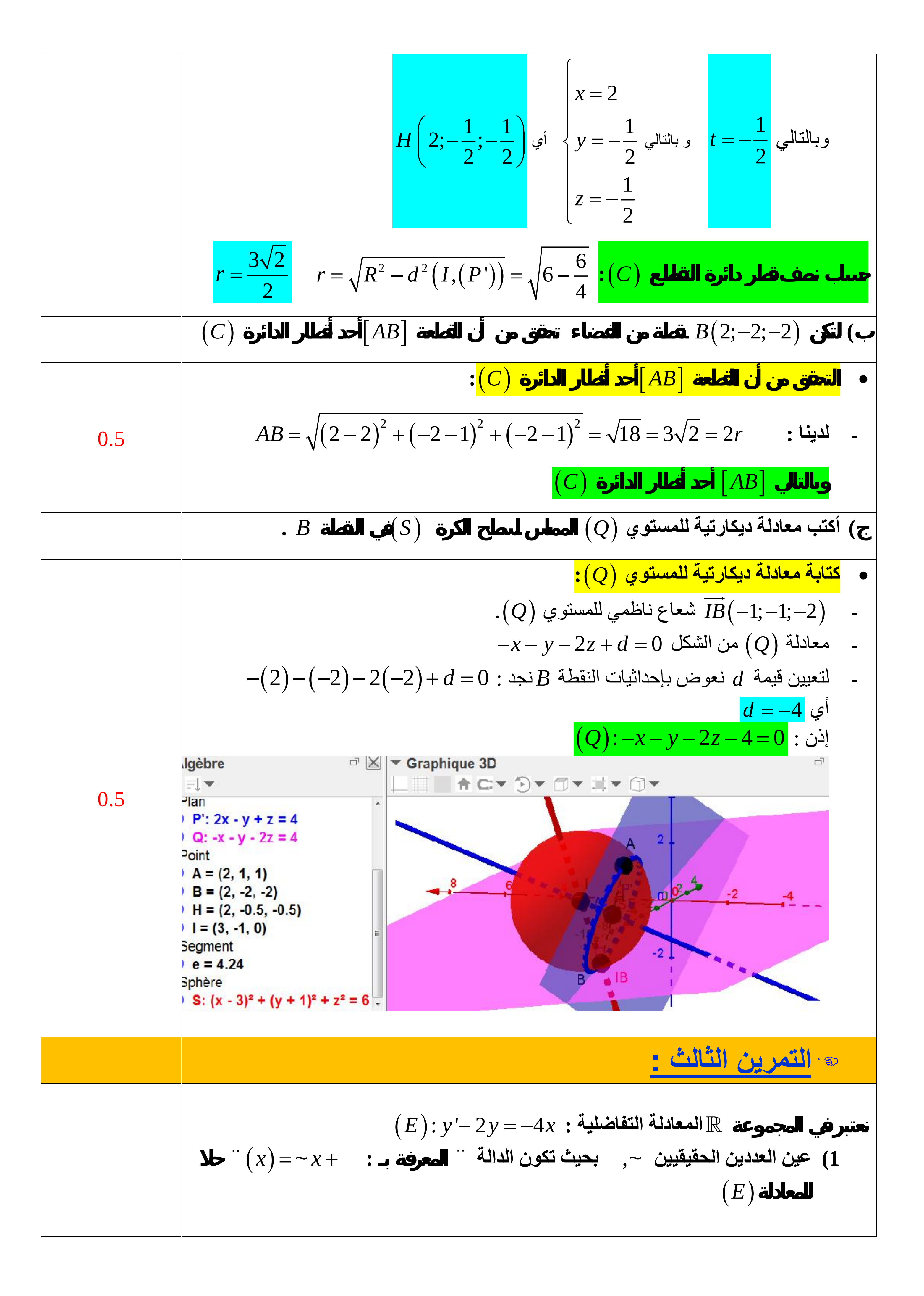
☜ تصحيح الموضوع التجريبي **الأول** للبكالوريا 2015 – **الشعبة** : علوم تجريبية

| التصحيح | العلامة |
| --- | --- |
| ☜ **التمرين الأول :** | |
| 1) **حل في مجموعة الأعداد المركبة** $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :<br>$z^2 - 8z + 17 = 0$ . | |
| • **حل المعادلة :** $z^2 - 8z + 17 = 0$<br>- حساب المميز $\Delta$ : $\Delta = (-8)^2 - 4(1)\times(17) = -4$<br>أي $\Delta = (2i)^2$<br>- المعادلة تقبل حلين هما :<br>$z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$ ، $z_2 = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$<br>مجموعة الحلول: $S = \{4-i; 4+i\}$ | $0.5 + 2\times 0.25$ |
| 2) **في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ **نعتبر**<br>**النقط** $D, B, A$ التي لواحقها على الترتيب $a = 4 - i, b = 4 + i$ **و** $d = -i$.<br>و ليكن $R$ **الدوران الذي مركزه النقطة** $\Omega$ **ذات اللاحقة** $\mu = 2$ و زاويته $\frac{®}{2}$<br>**أ)** بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ **من الشكل :** $z' = iz + 2 - 2i$. | |
| • **تبيان أن العبارة المركبة للدوران** $R$ **من الشكل :** $z' = iz + 2 - 2i$ :<br>- العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z' - \mu = e^{i\frac{®}{2}}(z - \mu)$<br>أي $z' - 2 = i(z - 2)$ ومنه $z' = i(z-2) + 2 = iz + 2 - 2i$<br>**إذن** $z' = iz + 2 - 2i$ | 0.75 |
| **ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة** $C$ **صورة النقطة** $B$ **بالدوران** $R$ **هي** $c = 1 + 2i$ | |
| • **التحقق أن لاحقة النقطة** $C$ **صورة النقطة** $B$ **بالدوران** $R$ **هي** $c = 1 + 2i$:<br>• لدينا : $R(B) = C$ يعني<br>$c = i\times b + 2 - 2i = i(4+i) + 2 - 2i = 4i - 1 + 2 - 2i = 1 + 2i$<br>$c = 1 + 2i$ | 0.25 |
| ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$. | |
| • **تبيان أن** $\frac{c-d}{c-b} = -i$:<br>- لدينا : $\frac{c-d}{c-b} = \frac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$<br>ومنه $\frac{c-d}{c-b} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i$ | 0.5 |

| | |
|---|---|
| • **استنتاج طبيعة المثلث** $BCD$ :<br>- لدينا : $\left\|\frac{c-d}{c-b}\right\|=\|-i\|=1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$<br>- يعني $\frac{DC}{BC}=1$ أي $DC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$<br>**إذن المثلث** $BCD$ **قائم في** $C$ **ومتساوي الساقين** | $0.25+0.25$ |
| **د) بين أنَ النقط** $C,B,A$ **و** $D$ **تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها** | |
| • **تبيان أنَ النقط** $C,B,A$ **و** $D$ **تنتمي الى نفس الدائرة :**<br>المثلث $BCD$ قائم في $C$ وبالتالي النقط $D,C,B$ تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي $\Omega$.<br>ولدينا :<br>$\Omega A=\|z_A-z_\Omega\|=\|4-i-2\|=\|2-i\|$<br>$\Omega A=\sqrt{5}$<br>إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{5}$<br>ومنه النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة **مركزها** $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$.<br><br> | $0.5$<br><br>$0.5$ |
| **ه) عين** $(E)$ **مجموعة النقط** $M$ **من المستوي ذات اللاحقة** $z$ **بحيث يكون ،** $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$. | |
| • **تعيين مجموعة النقط** $(E)$ **من المستوي والتي تحقق :** $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$:<br>$\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$ **يعني** $MD^2-MA^2=16$<br>ولتكن النقطة $I$ منتصف القطعة $[DA]$<br>إذن لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=16$<br>أي $\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2-\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}^2=16$<br>ومنه $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=16$ لان $\overrightarrow{ID}^2=\overrightarrow{IA}^2$ ( $I$ منتصف القطعة $[DA]$)<br>وبالتالي : $2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)=16$ أي $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AD}=16$<br>إذن : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$<br>لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $M$ على $(DA)$ حيث $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}=8$<br>أي $IH\times DA=8$<br>- ولدينا : $DA=\|z_A-z_D\|=\|4-i+i\|=\|4\|=4$ وبالتالي $IH=2$<br>- **وبالتالي** $H$ **منطبقة على النقطة** $A$.<br>إذن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ يعني $\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{DA}=8$<br>ومنه $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $8+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$<br>وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA}=0$ ( لان $H=A$ )<br>**المجموعة** $(E)$ **هي المستقيم العمودي على** $(DA)$ **و المارمن** $A$ **أي** | $01$ |

| | |
|---|---|
| | $(E)=(AB)$<br>☜ **أوبطريقة أخرى :**<br>$\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$ **يعني** $\|-i-x-iy\|^2-\|4-i-x-iy\|^2=16$<br>ومنه : $\|-x+i(-1-y)\|^2-\|4-x+(-1-y)\|^2=16$<br>أي $(-x)^2+(-1-y)^2-(4-x)^2-(-1-y)^2=16$ ومنه<br>$x^2-16+8x-x^2=16$<br>ومنه : $8x=32$<br>**وبالتالي :** $x=4$ **المجموعة** $(E)$ هي المستقيم ذي المعادلة $x=4$ **العمودي على** $(x'x)$ **والمار من النقطة** $A$ |
| | ☜ **التمرين الثاني :** |
| | **في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين<br>$I(3,-1,0),A(2,1,1)$ **و** $(P)$**مجموعة النقط** $M(x,y,z)$ **من الفضاء التي تحقق،**<br>$MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ |
| | **1) أ)** بين أن النقطة A **تنتمي الى المجموعة** $(P)$ . |
| 0.5 | • تبيان أن النقطة A **تنتمي الى المجموعة** $(P)$ **:**<br>- **لدينا :** $AA^2-\overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AI}=0$ ومنه $A\in(P)$ |
| | **ب)** بين أن المجموعة $(P)$ هي مستو $x-2y-z+1=0$ **معادلة** ديكارتية له. |
| 0.5 | • تبيان أن **المجموعة** $(P)$ هي مستو $x-2y-z+1=0$ **معادلة** ديكارتية له:<br>- **لدينا :** $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ يعني $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$<br>**ومنه** $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI})=0$ أي $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM})=0$<br>**وبالتالي** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=0$<br>**المجموعة** $(P)$ هي مستو $\overrightarrow{IA}$ شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A<br>- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$:<br>لدينا : $\overrightarrow{AI}(1;-2;-1)$<br>معادلة $(P)$ **من الشكل** $x-2y-z+d=0$<br>- **تعيين قيمة** $d$ : نعوض بإحداثيات النقطة A **نجد :** $2-2(1)-1+d=0$<br>ومنه $d=1$ **أي معادلة** $(P)$ **هي** $x-2y-z+1=0$ |

| | |
|---|---|
| 2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمرمن النقطة $A$. <br> ▪ تحقق أن نصف قطرسطح الكرة $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ | |
| • **التحقق أن نصف قطر $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ :** <br> - لدينا : $R=AI=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ . <br> - **تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$:** <br> $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=6$ | 0.5 <br><br> 0.5 |
| 3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$. <br> أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$. | |
| • **تبيان أن $(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$:** <br> - لدينا : $d(I,(P'))=\dfrac{\lvert 2(3)-(-1)+0-4\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{\lvert 3\rvert}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ <br> أي لدينا : $d(I,(P'))<R$ ومنه **$(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$** | 0.25 |
| • **تعيين مركز الدائرة $(C)$ ونصف قطرها :** <br> - **تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المار من $I$ مركزسطح الكرة $(S)$ و العمودي على $(P')$:** <br> $(\Delta):\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1;(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$ <br> - **تعيين $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(P')$:** <br> نحل لجملة : $\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1\\z=t\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ <br> إذن : $2(2t+3)-(-t-1)+t-4=0$ ومنه $6t+3=0$ | 0.75 |

| | |
|---|---|
| | وبالتالي $t=-\frac{1}{2}$ و بالتالي $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$ أي $H\left(2;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ <br> **حساب نصف قطر دائرة التقاطع $(C)$:** $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P')\right)}=\sqrt{6-\frac{6}{4}}$ $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| | **ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** |
| 0.5 | • **التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$:** <br> - **لدينا :** $AB=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=2r$ <br> **وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** |
| | ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ **المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة** $B$ . |
| 0.5 | • كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$: <br> - $\overrightarrow{IB}(-1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(Q)$. <br> - معادلة $(Q)$ من الشكل $-x-y-2z+d=0$ <br> - لتعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $B$ نجد : $-(2)-(-2)-2(-2)+d=0$ <br> أي $d=-4$ <br> إذن : $(Q):-x-y-2z-4=0$ <br>   |
| | ☜ **التمرين الثالث :** |
| | **نعتبر في المجموعة** $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E): y'-2y=-4x$ <br> 1) عين العددين الحقيقيين ~ , بحيث تكون الدالة ¨ **المعرفة بـ :** ¨$(x)=$~$x+$ **حلا للمعادلة** $(E)$ |

| | |
|---|---|
| 01 | ▪ **تعيين العددين الحقيقيين ~ , :**<br>▪ الدالة ¨ حل للمعادلة $(E)$ يعني $¨'(x)-2¨(x)=-4x$<br>ومنه $\sim-2(\sim x+\ )=-4x$ أي $\sim-2\sim x-2\ =-4x$<br>وبالتالي : $-2\sim x+\sim-2\ =-4x$<br>- بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-2\sim=-4\\ \sim-2\ =0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\sim=2\\ \ =1\end{cases}$ وبالتالي $¨(x)=2x+1$ |
| | 2) **نعتبر في المجموعة** $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E'):y'-2y=0$.<br>أ) **بين أن الدالة** $f$ **حل للمعادلة** $(E)$ **إذا وفقط إذا كانت الدالة** $(f-¨)$ **حلا للمعادلة** $(E')$ |
| 01 | ▪ **نبرهن أنه إذا كان** $f$ **حل للمعادلة** $(E)$ **فإن** $(f-¨)$ **حلا للمعادلة** $(E')$**:**<br>- $f$ حلا للمعادلة $(E)$ يعني $f'(x)-2f(x)=-4x$<br>يعني $f'(x)-2f(x)=¨'(x)-2¨(x)$<br>ومنه : $f'(x)-¨'(x)-2f(x)+2¨(x)=0$<br>ومنه : $(f'-¨')(x)-2(f-¨)(x)=0$<br>ومنه : $(f-¨)$ **حلا للمعادلة** $(E')$<br>▪ **نبرهن أنه إذا كان** $(f-¨)$ **حل للمعادلة** $(E')$ **فإن** $f$ **حلا للمعادلة** $(E)$**:**<br>- $(f-¨)$ حلا للمعادلة $(E')$ يعني $(f-¨)'(x)-2(f-¨)(x)=0$<br>ومنه $f'(x)-¨'(x)-2f(x)+2¨(x)=0$<br>أي $f'(x)-2f(x)=¨'(x)-2¨(x)$<br>وبالتالي : $f'(x)-2f(x)=-4x$<br>**ومنه الدالة** $f$ **حل للمعادلة** $(E)$<br>**إذن الدالة** $f$ **حل للمعادلة** $(E)$ **إذا وفقط إذا كانت الدالة** $(f-¨)$ **حلا للمعادلة** $(E')$ |
| | ب) **حل المعادلة** $(E')$ **ثم استنتج حلول المعادلة** $(E)$. |
| $0.5+0.5$ | ▪ **حل المعادلة** $(E')$**:**<br>- **حلول المعادلة** $(E')$**:** هي الدوال من الشكل $y=ke^{2x}$<br>- **استنتاج حلول المعادلة** $(E)$**:**<br>هي الدوال من الشكل : $f(x)=ke^{2x}+¨(x)=ke^{2x}+2x+1$ |
| | ج) **عين حلا خاصا** $f$ **للمعادلة** $(E)$ والذي يحقق ، $f(0)=3$ |
| 01 | ▪ **تعيين الحل الخاص** $f$ **حيث** $f(0)=3$ **:**<br>$f(0)=3$ يعني $ke^{2\times0}+2(0)+1=3$<br>ومنه $k+1=3$ أي $k=2$<br>- وبالتالي : $f(x)=2e^{2x}+2x+1$ |
| | ☜ **التمرين الرابع :** |
| | نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$ |

| | |
|---|---|
| | نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. |
| | **I. 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $0$ وعند $+\infty$.** |
| 0.25 + 0.25 | • **حساب نهايتي الدالة $f$ :**<br>- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right) = +\infty$ لان $\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = +\infty\end{cases}$<br>- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right) = +\infty$ لان $\begin{cases}\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = +\infty\end{cases}$ |
| | **2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$، $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم**<br>**استنتج اتجاه تغير الدالة $f$** |
| 0.75 | • **حسب $f'(x)$ :**<br>$f'(x) = 1 + 3\times\frac{\frac{2x(3x)-3(x^2+2)}{(3x)^2}}{\frac{x^2+2}{3x}} = 1 + 3\times\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{3x}{x^2+2}$<br>أي $f'(x) = 1 + \frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{9x}{x^2+2} = 1 + \frac{3x^2-6}{x(x^2+2)} = \frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)}$<br>وبالتالي : $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ |
| 0.5 | • **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**<br>$f'(x) = 0$ يعني $\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)} = 0$<br>ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ (ليس لها حل لان $\Delta = 16-24 = -8 < 0$) مع $x \in ]0;+\infty[$<br>ومنه $x = 1$ |

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لان $x(x^2+2)>0$

| $x-1$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+4x+6$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- **الدالة** $f$ **متناقصة على المجال** $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

3) **شكل جدول تغيرات الدالة** $f$ .

- **جدول تغيرات الدالة** $f$ **:**

0.5

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) **أدرس الوضع النسبي للمنحنى** $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ **ذي المعادلة** $y=x$ .

01

- **دراسة الوضع النسبي للمنحنى** $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ **ذي المعادلة** $y=x$ **:**
- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$
- لدينا : $f(x)-y=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)-x=3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$
- $f(x)-y=0$ يعني $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$ أي $\frac{x^2+2}{3x}=1$

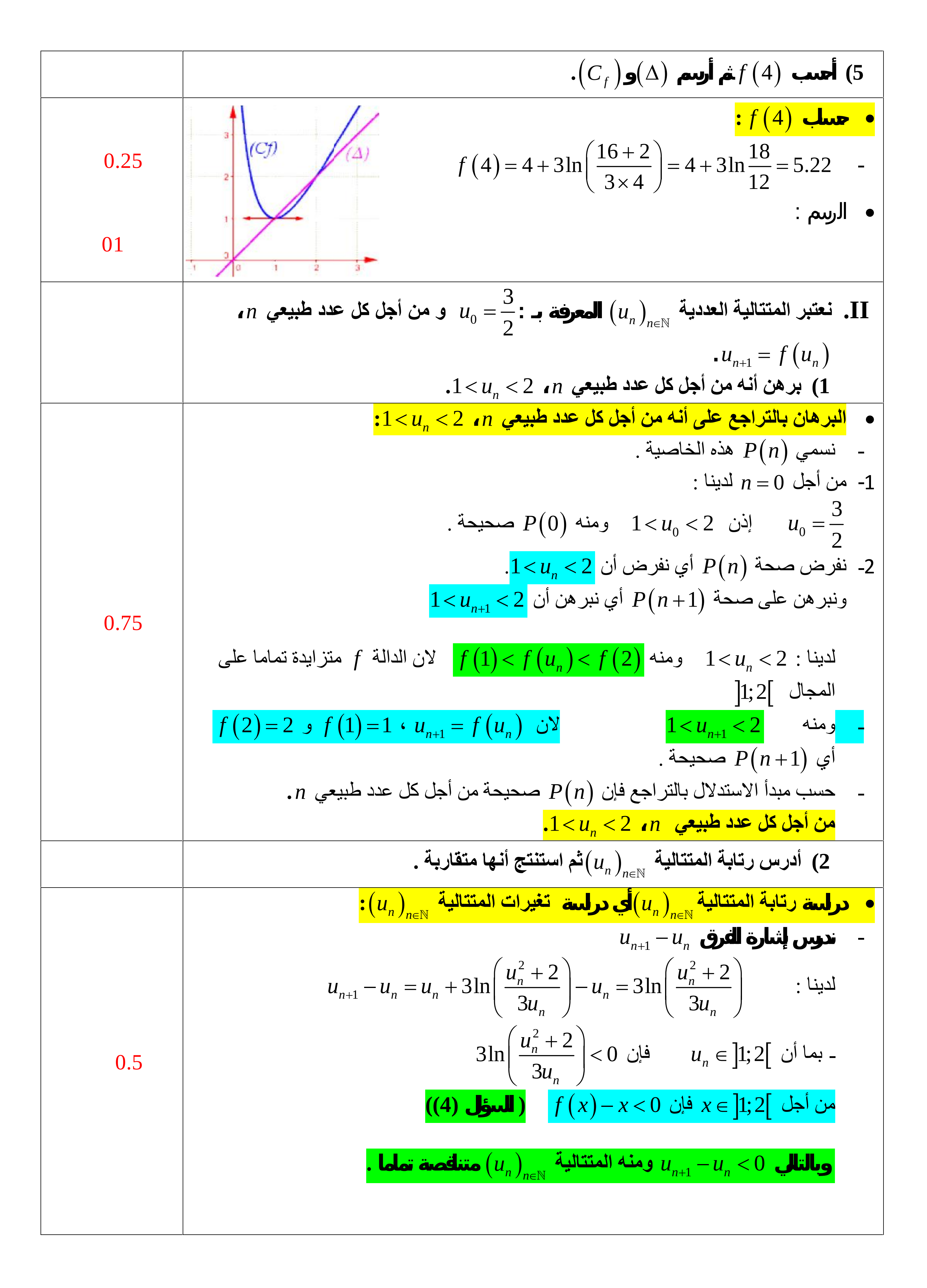
- **وبالتالي** $x^2+2=3x$

**إذن :** $x^2-3x+2=0$

- حساب المميز : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ ، $x_1=\frac{3+1}{2}=2$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | ‖ | يقع $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | يقع $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | يقع $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | |



| | |
|---|---|
| 5) **أحسب** $f(4)$ **ثم أرسم** $(\Delta)$ **و** $(C_f)$. | |
| • **حسب** $f(4)$ **:**<br>- $f(4)=4+3\ln\left(\frac{16+2}{3\times 4}\right)=4+3\ln\frac{18}{12}=5.22$<br>• الرسم : | 0.25<br><br>01 |
| **II. نعتبر المتتالية العددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بـ :** $u_0=\frac{3}{2}$ **و من أجل كل عدد طبيعي** $n$**،**<br>$u_{n+1}=f(u_n)$.<br>**1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n$**،** $1<u_n<2$. | |
| • **البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n$ **،** $1<u_n<2$**:**<br>- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>-1 من أجل $n=0$ لدينا :<br>$u_0=\frac{3}{2}$ إذن $1<u_0<2$ ومنه $P(0)$ صحيحة .<br>-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1<u_n<2$.<br>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1<u_{n+1}<2$<br>لدينا : $1<u_n<2$ ومنه $f(1)<f(u_n)<f(2)$ لان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;2[$<br>- ومنه $1<u_{n+1}<2$ لان $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(1)=1$ و $f(2)=2$<br>أي $P(n+1)$ صحيحة .<br>- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.<br>**من أجل كل عدد طبيعي** $n$**،** $1<u_n<2$. | 0.75 |
| **2) أدرس رتابة المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ثم استنتج أنها متقاربة .** | |
| • **دراسة رتابة المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **أي دراسة تغيرات المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**:**<br>- **ندرس إشارة الفرق** $u_{n+1}-u_n$<br>لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n+3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)-u_n=3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)$<br>- بما أن $u_n\in]1;2[$ فإن $3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)<0$<br>من أجل $x\in]1;2[$ فإن $f(x)-x<0$ **( السؤال (4))**<br>**وبالتالي** $u_{n+1}-u_n<0$ **ومنه المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متناقصة تماما .** | 0.5 |

| | |
|---|---|
| 0.5 | • **استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مقاربة :**<br>- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد $1$ وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد $1$ . |
| | **3) عين نهاية المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. |
| 0.25 | • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ |



**✌ بالتوفيق☹ و النجاح☺ في البكالوريا ☺**



| التصحيح | العلامة |
|---|---|
| ☜ **التمرين الأول :** | **04.5 نقطة** |
| **1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ : $z^2-2z+2=0$**<br>- حساب المميز : $\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4=4i^2=(2i)^2$<br>- المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i$<br>- مجموعة الحلول $S=\{1-i,1+i\}$ | **3*0.25** |
| **2) لدينا :** $z_M=-i\sqrt{3}, z_L=1-i, z_K=1+i$<br>- **تعليم النقط :** | **3*0.25** |
| **3) أ) التحقق أن** $z_N=2+i(\sqrt{3}-2)$ :<br>- لدينا : النقطة $N$ نظيرة النقطة $M$ بالنسبة الى $L$ يعني $L$ منتصف $[MN]$<br>ومنه $2z_L=z_M+z_N$<br>أي $2z_L-z_M=z_N$ وبالتالي $z_N=2(1-i)+i\sqrt{3}=2+i(\sqrt{3}-2)$ | **0.25** |
| **ب) تعيين لاحقتي النقطتين $A$ و $C$:**<br>- **العبارة المركبة للدوران $r$ :**<br>$z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_O)$ أي $z'=iz$ | **0.25** |
| - **حساب $z_A$ :**<br>$r(M)=A$ معناه $z_A=\sqrt{3}$ ، $z_A=iz_M=i(-i\sqrt{3})=\sqrt{3}$ | **0.25** |
| - **حساب $z_C$ :**<br>$r(N)=C$ معناه $z_C=iz_N=i(2+i(\sqrt{3}-2))=2i-\sqrt{3}+2$<br>ومنه $z_C=2-\sqrt{3}+2i$ | **0.25** |
| **ج) تعيين لاحقتي النقطتين $B$ , $D$:**<br>- العبارة المركبة للانسحاب $t$ هي $z'=z+2i$<br>- لدينا : $t(N)=B$ يعني $z_B=z_N+2i=2+i\sqrt{3}-2i+2i=2+i\sqrt{3}$<br>- **ولدينا :** $t(M)=D$ يعني $z_D=z_M+2i=-i\sqrt{3}+2i=(2-\sqrt{3})i$ | **3*0.25** |

| | |
|---|---|
| **4) أ) تبيان أن النقطة $K$ هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمتين $[DB]$ و $[AC]$:**<br>- لدينا : $z_K = 1+i = \frac{2+i\sqrt{3}+2i-i\sqrt{3}}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$<br>- ولدينا : $z_K = 1+i = \frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2i}{2} = \frac{z_A+z_C}{2}$<br>ومنه النقطة $K$ هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمتين $[DB]$ و $[AC]$ | **0.25** |
| **ب) تبيان أن $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K} = i$:**<br>- لدينا : $\frac{1-\sqrt{3}+i}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)i} = \frac{2-\sqrt{3}+2i-1-i}{2+i\sqrt{3}-1-i} = \frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}$<br>أي $i = \frac{i\left(1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right)}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)i} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)i^2+i}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)i} = \frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}$<br>ومنه $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K} = i$ | **0.5** |
| - **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$ :**<br>- **قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان** لان $K$ هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمتين $[DB]$ و $[AC]$.<br>- ولدينا : $\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right) = \frac{®}{2}$ أي قطراه متعامدان.<br>إذن **الرباعي $ABCD$ مربع** | 0.5 |
| **التمرين الثاني :** | **04.5 نقطة** |
| **I.** **لدينا :** $u_0 = \frac{1}{3}$ **ومن أجل كل عدد طبيعي $n$،** $u_{n+1} = \frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$ | |
| **1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0 < u_n < 1$:**<br>- **نسمي** $P(n)$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0 < u_n < 1$<br>**1) نتحقق من صحة** $p(0)$ : لدينا $u_0 = \frac{1}{3}$ **و** $0 < \frac{1}{3} < 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة .<br>**2) نفرض صحة** $P(n)$ أي $0 < u_n < 1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ( فرضية التراجع)<br>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 1$. من أجل كل عدد طبيعي $n$<br>- لدينا: $0 < u_n < 1$ **ومنه** $1 < 1+2u_n < 3$ **ومنه** $\frac{1}{3} < \frac{1}{1+2u_n} < 1$<br>ومنه $-1 < -\frac{1}{1+2u_n} < -\frac{1}{3}$ **ومنه** $0 < 1-\frac{1}{1+2u_n} < \frac{2}{3}$<br>**ومنه** $0 < \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u_n}\right) < \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}$ **ومنه** $0 < u_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .<br>- **حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان** $0 < u_n < 1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ | 0.25<br><br>0.25<br><br>0.25 |

| | |
|---|---|
| 0.5 | 2) أ) التحقق من أن: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$<br>- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]-u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1+2u_n-1}{1+2u_n}\right)-u_n$<br>ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{3\times 2u_n}{2(1+2u_n)}-u_n=\frac{3u_n}{1+2u_n}-u_n=\frac{3u_n-u_n-2u_n^2}{1+2u_n}$<br>أي $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2}{1+2u_n}=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$<br>$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ |
| 0.5 | - استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$:<br>ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$<br>من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $0<u_n<1$<br>- إشارة الفرق من إشارة $1-u_n$ لان $2u_n>0$ و $1+2u_n>0$<br>**من أجل** $0<u_n<1$ فإن $0<1-u_n<1$<br>أي $1-u_n>0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة تماما . |
| 0.25+0.5 | **ب) تبيان أن المتتالية** $(u_n)$ متقاربة :<br>- بما أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .<br>- حساب نهايتها :<br>نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$<br>أي $l=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2l}\right]$ ومنه $2l=3-\frac{3}{1+2l}$<br>إذن: $2l(1+2l)=3(1+2l)-3$ ومنه $2l+4l^2=3+6l-3$<br>وبالتالي: $4l(l-1)=0$<br>**إما** $l=0$ أو $l=1$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ |
| | **.II** لدينا : $v_n=-\frac{u_n-1}{2u_n}$ |

| العلامة | الحل |
|---|---|
| 0.5<br>2*0.25 | **أ) تبيان أن المتتالية $(v_n)$ هندسية :**<br>- لدينا : $v_{n+1} = -\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}} = \frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \frac{1-\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]}{2\times\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]}$ ومنه<br>أي $v_{n+1} = \frac{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2u_n}{1+2u_n}\right)}{3\left(\frac{2u_n}{1+2u_n}\right)} = \frac{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}{\frac{6u_n}{1+2u_n}} = \frac{1-u_n}{3\times 2u_n}$<br>$v_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1-u_n}{2u_n} = \frac{1}{3}v_n$<br>ومنه $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{-u_0+1}{2u_0} = \frac{-\frac{1}{3}+1}{2\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$ |
| 0.25 | **ب) كتابة عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ :**<br>- لدينا : $v_n = v_0\times q^n = 1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ |
| 0.25 | - **استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ :**<br>لدينا : $v_n = -\frac{u_n-1}{2u_n}$ ومنه $2u_nv_n = 1-u_n$ أي $2u_nv_n+u_n=1$<br>أي $u_n(2v_n+1)=1$ وبالتالي $u_n=\frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$ |
| 0.25 | - حساب نهاية المتتالية $(u_n)$:<br>لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = 1$ لان $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ |
| 0.25 | **ج) حسب المجموع :**<br>$S_n = v_0+v_1+...+v_n = v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$<br>أي $S_n = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ |

| التمرين الثالث : | 04نقاط |
|---|---|
| ▪ لدينا : $A(12;7;-13)$ ، $B(3;1;2)$ ، $\vec{n}(3;2;-5)$ و $(P'): x+y-2z=0$ | |
| **1) تبيان أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له**<br>لدينا : $\vec{n}(3;2;-5)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$<br>و $\vec{n'}(1;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P')$<br>لدينا $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{1}$ أي لا يوجد عدد حقيقي $k$ حيث $\vec{n}=k\vec{n'}$ ومنه $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم<br>- **تبيان أن مستقيم تقاطعهما يشمل $B$ و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له**<br>- لدينا: $B \in (P)$ و $3+1-2(2)=0$ أي $B \in (P')$.<br>- ولدينا من جهة أخرى : $\vec{u}.\vec{n}_{(P)} = 1\times3+1\times2+1\times(-5)=5-5=0$<br>و $\vec{u}.\vec{n}_{(P')} = 1\times1+1\times1+1\times(-2)=2-2=0$<br>أي $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}_{(P)}$ و $\vec{n}_{(P')}$ .<br>**ومنه $\vec{u}$ شعاع توجيه لمستقيم تقاطع $(P)$ و $(P')$** | 0.25<br>0.25<br>0.25<br>0.25 |
| **2) اثبات أن النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$:**<br>- لدينا $B \in (P)$ و $\overrightarrow{AB}(-9;-6;15)$ أي $\overrightarrow{AB}=-3\vec{n}_{(P)}$<br>**ومنه النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$** | 0.25<br>0.25 |
| **3) لدينا : تمثيل وسيطي للمستوي $(Q)$:** $(t;\lambda)\in\mathbb{R}^2$ ; $(Q):\begin{cases} x=2t-2\lambda+6 \\ y=2t+3\lambda+5 \\ z=2t-6 \end{cases}$ | |
| **أ) اثبات أن $(P)$ و $(Q)$ متوازيان :**<br>- شعاعي توجيه للمستوي $(Q)$ : $\vec{u_Q}(2;2;2)$ و $\vec{v_Q}(-2;3;0)$<br>$\vec{u}_Q.\vec{n_P}=2\times3+2\times2+2\times(-5)=10-10=0$<br>و $\vec{v}_Q.\vec{n_P}=-2\times3+3\times2+0\times(-5)=-6+6=0$<br>أي $\vec{n_P}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u_Q}$ و $\vec{v_Q}$ **ومنه $(P)$ و $(Q)$ متوازيان** | 0.25<br>0.25<br>0.25 |
| **ب) التحقق أن المعادلة $3x+2y-5z=58$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$:**<br>- لدينا : $3(2t-2\lambda+6)+2(2t+3\lambda+5)-5(2t-6)=6t-6\lambda+18+4t+6\lambda+10-10t+30$<br>أي $3(2t-2\lambda+6)+2(2t+3\lambda+5)-5(2t-6)=58$<br>**ومنه $3x+2y-5z=58$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$** | 0.5 |
| **ج) التحقق أن النقطة $I$ تنتمي الى المستوي $(Q)$:**<br>لدينا : $I$ منتصف القطعة $[AB]$ يعني $I\left(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2}\right)$<br>- بالتعويض في معادلة $(Q)$ نجد : $3\left(\frac{15}{2}\right)+2(4)-5\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{45}{2}+\frac{16}{2}+\frac{55}{2}=\frac{116}{2}=58$ | 0.25 |

ومنه $I\in(Q)$

- **لستنتاج أن المستوي** $(Q)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$:

لدينا $I\in(Q)$ و لدينا $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{n_{(P)}}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{n_{(P)}}$

ومنه $(Q)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ (0.25)

**4) لدينا :** $(S)$ **مجموعة النقا** $M$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

**أ) تبيان أن** $(S)$ **هي سطح كرة :**

لدينا : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ يعني $(S)$ سطح كرة أحد أقطارها القطعة $[AB]$. (0.25)

أي مركز سطح الكرة هو $I$ **منتصف القطعة** $[AB]$ .

ونصف قطرها $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(-9)^2+(-6)^2+(15)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{432}}{2}$ (0.25)

**ب) تبيان أن المستوي** $(Q)$ **يقطع** $(S)$ **وفق دائرة :**

- لدينا : $I\in(Q)$ **وبالتالي** $(Q)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة مركزها $I$ ونصف قطرها $R$. (0.25)

## ☜ التمرين الرابع : (07 نقا)

**I. لدينا :** $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

**1) دراسة تغيرات الدالة** $g$:

- **حساب النهايات :**

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ (0.25)

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}-e^{-x}+2\right)=2$ (0.25)

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

- **حسلب المشتقة :**

$g'(x)=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})=(2-x)e^{-x}$ (0.25)

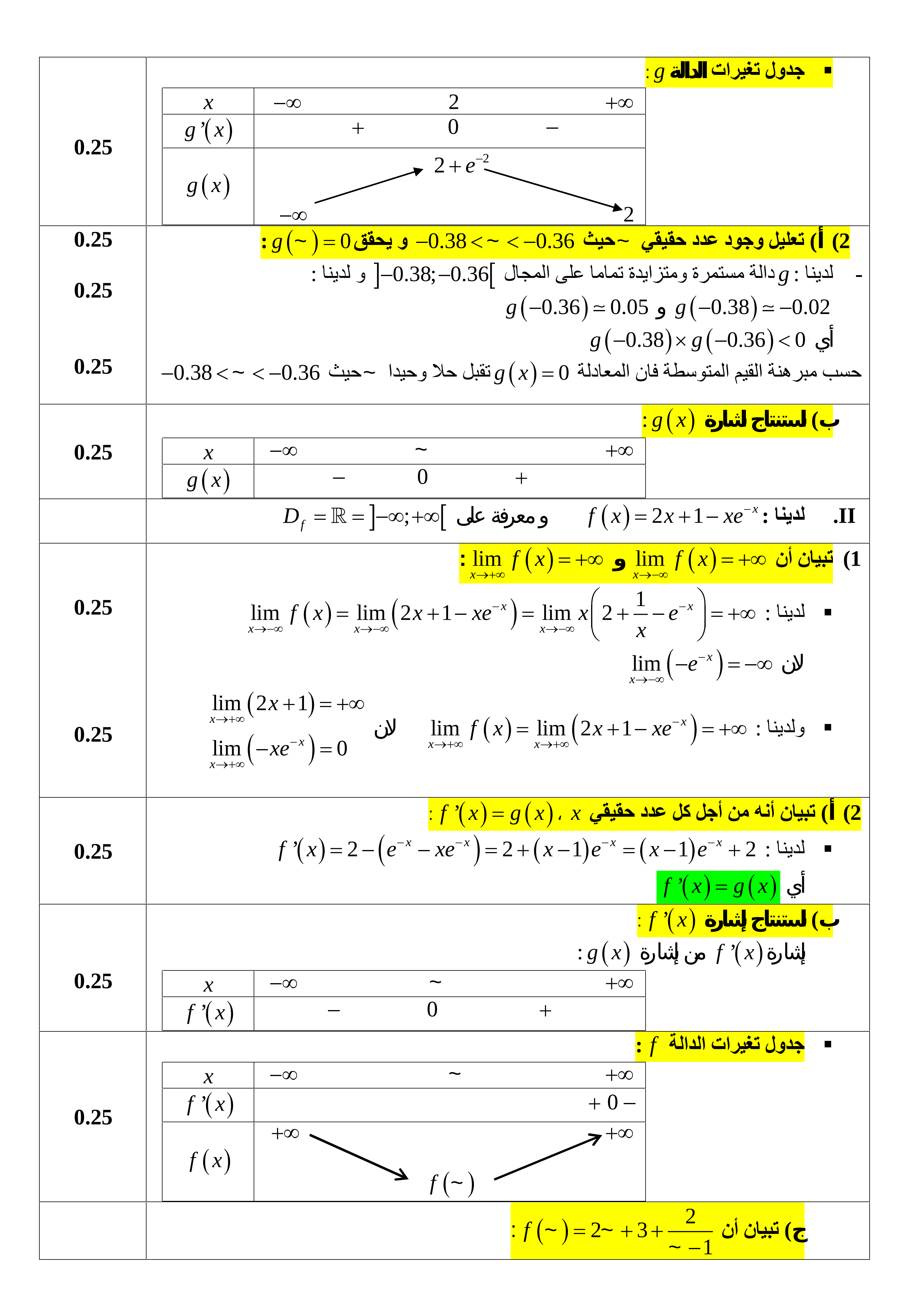
- **دراسة لشارة** $g'(x)$:

$g'(x)=0$ يعني $2-x=0$ ومنه $x=2$ (0.25)

لشارة $g'(x)$ من لشارة $2-x$ لان $e^{-x}>0$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | + | 0 | − | |
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | |

(0.25)



▪ **جدول تغيرات الدالة** $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2+e^{-2}$ | $\searrow$ | $2$ |

**0.25**

**2) أ) تعليل وجود عدد حقيقي** $\sim$ **حيث** $-0.38<\sim<-0.36$ **و يحقق** $g(\sim)=0$ **:**

- لدينا : $g$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.38;-0.36[$ و لدينا : **0.25**

$g(-0.38)\simeq-0.02$ و $g(-0.36)\simeq0.05$ **0.25**

أي $g(-0.38)\times g(-0.36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\sim$ حيث $-0.38<\sim<-0.36$ **0.25**

**ب) لستنتاج لشارة** $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\sim$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**0.25**

**.II** لدينا : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ومعرفة على $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

**1) تبيان أن** $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ **و** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **:**

▪ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$ **0.25**

لان $\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right)=-\infty$

▪ ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$ **0.25**

**2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ ، $f'(x)=g(x)$ :

▪ لدينا : $f'(x)=2-\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)=2+(x-1)e^{-x}=(x-1)e^{-x}+2$ **0.25**

أي $f'(x)=g(x)$

**ب) لستنتاج إشارة** $f'(x)$ :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\sim$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

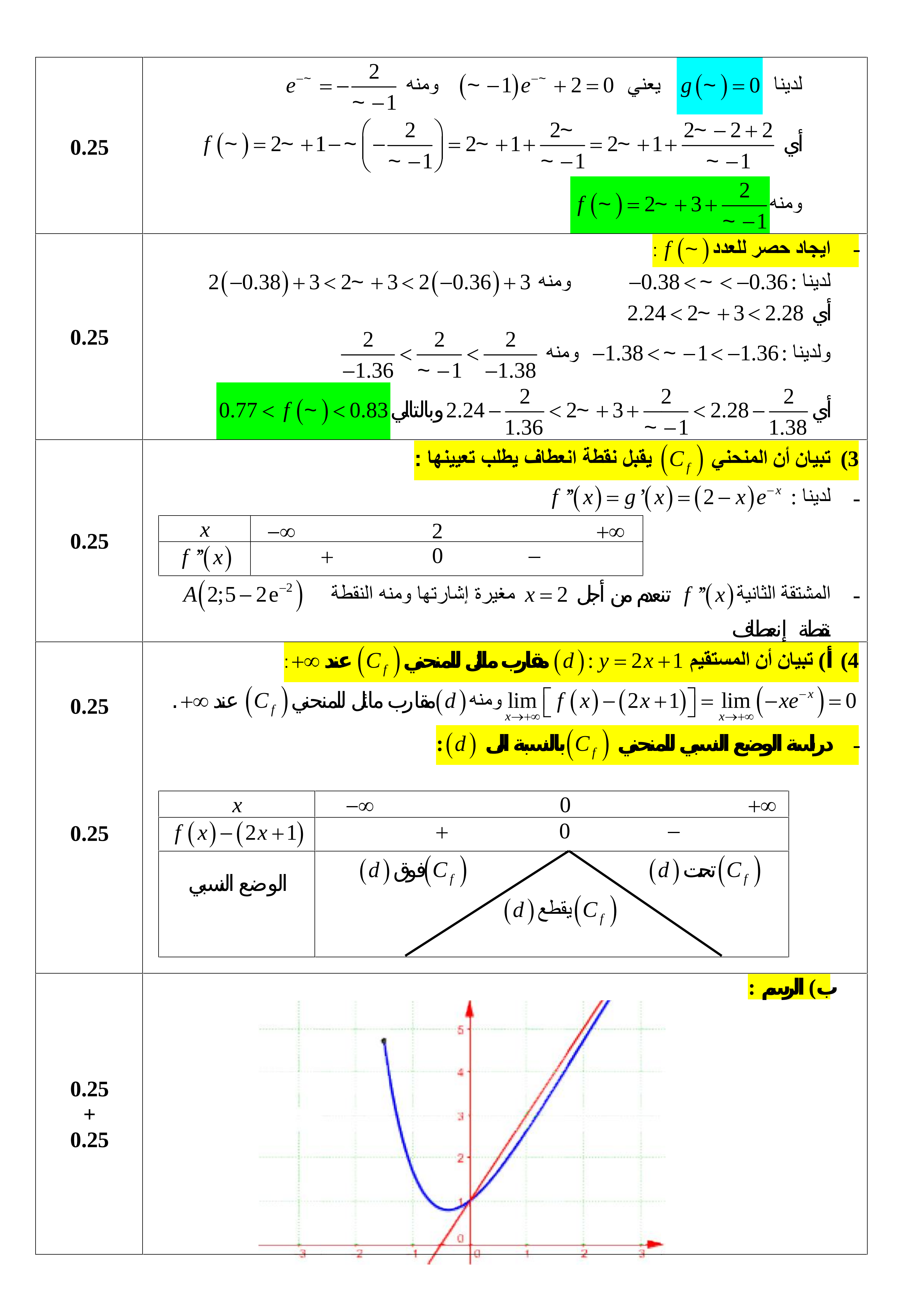
**0.25**

▪ **جدول تغيرات الدالة** $f$ **:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\sim$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | $+\ 0\ -$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\sim)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0.25**

**ج) تبيان أن** $f(\sim)=2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}$ :



لدينا $g(\sim)=0$ يعني $(\sim-1)e^{-\sim}+2=0$ ومنه $e^{-\sim}=-\frac{2}{\sim-1}$

أي $f(\sim)=2\sim+1-\sim\left(-\frac{2}{\sim-1}\right)=2\sim+1+\frac{2\sim}{\sim-1}=2\sim+1+\frac{2\sim-2+2}{\sim-1}$

ومنه $f(\sim)=2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}$

**0.25**

- ايجاد حصر للعدد $f(\sim)$ :

لدينا: $-0.38<\sim<-0.36$ ومنه $2(-0.38)+3<2\sim+3<2(-0.36)+3$

أي $2.24<2\sim+3<2.28$

ولدينا: $-1.38<\sim-1<-1.36$ ومنه $\frac{2}{-1.38}<\frac{2}{\sim-1}<\frac{2}{-1.36}$

أي $2.28-\frac{2}{1.38}<2\sim+3+\frac{2}{\sim-1}<2.24-\frac{2}{1.36}$ وبالتالي $0.77<f(\sim)<0.83$

**0.25**

3) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}$

| $x$ | $-\infty$     $2$     $+\infty$ |
| --- | --- |
| $f''(x)$ | $+$     $0$     $-$ |

- المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها ومنه النقطة $A(2;5-2e^{-2})$ نقطة إنعطاف

**0.25**

4) أ) تبيان أن المستقيم $(d):y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ :

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$ ومنه $(d)$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

**0.25**

- دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى $(d)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f(x)-(2x+1)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(d)$ | $(C_f)$ يقطع $(d)$ | $(C_f)$ تحت $(d)$ |

**0.25**

ب) الرسم :

**0.25 + 0.25**

5) لدينا : $h(x)=f\left(x^2e^x\right)$

**0.25**

- **حساب** $h'(x)$: لدينا $h'(x)=\left(x^2e^x\right)'\times f'\left(x^2e^x\right)$
- أي $h'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x\times g\left(x^2e^x\right)$
- إشارة $h'(x)$ من إشارة $x^2+2x$ لان $e^x>0$ و $g\left(x^2e^x\right)>0$
- **جدول إشارة** $h'(x)$ :

**0.25**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- **جدول تغيرات الدالة** $h$:

**0.25+0.25**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $1$ | ↗ | $h(-2)$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

6) لدينا : $k(x)=(ax+b)e^{-x}$ مع $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

أ) **تعيين العددين الحقيقيين** $a,b$ **حتى تكون الدالة** $k$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto -xe^{-x}$

**0.25**

- لدينا : $k'(x)=-xe^{-x}$

**0.25**

إذن : $k'(x)=ae^{-x}+(ax+b)\times\left(-e^{-x}\right)=(-ax+a-b)e^{-x}$

- بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=-1\\ a-b=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1\\ b=a=1\end{cases}$ إذن $k(x)=(x+1)e^{-x}$

ب) **استنتاج دالة أصلية للدالة** $f$ **على** $\mathbb{R}$:

**0.25**

- لدينا : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ومنه دالة أصلية للدالة $f$ **على** $\mathbb{R}$ هي :

$F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}$

**انتهى تصحيح الموضوع التجريبي الثاني**

**✌ بالتوفيق ☺ و النجاح في البكالوريا ☺**



**امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية** **ثانوية الونشريسي تيسمسيلت**
**الشعبة : العلوم التجريبية** **دورة: ماي 2015**

## التمرين الأول :(5نقاط)

**اجب بصح أو خطأ على الأسئلة التالية مع التبرير**

1) الشكل الجبري للعدد المركب $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4.\left(\sqrt{3}+i\right)^5$ هو $256\sqrt{3}+256i$

2) المعادلة: $z^2+6\overline{z}-7=0$ تقبل حلين مختلفين .

3) $z_1$ و $z_2$ عددا ن مركبان يحققان: $|z_1|=|z_2|=1$ العدد المركب $L$ حيث $L=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ هو عدد حقيقي.

4) $z_1$ عدد مركب معرف كما يلي: $2z_1=3+i\sqrt{3}$

قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^n$ تخيلي صرف هي: $n=3+6k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

5) $\theta$ عدد حقيقي ، $M$ نقطة من المستوي لاحقتها $Z=2i+\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}e^{i\theta}$ مجموعة النقط $M$ لما يتغير العدد الحقيقي $\theta$ على $\mathbb{R}$ هي دائرة نصف قطرها 1 ومركزها $\Omega(0,2)$

## التمرين الثاني : (4,5 نقطة)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+3n-1$

1) احسب $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$، $u_n>0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$، $u_n>3n-4$

جـ) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$.

3) نعرف المتتالية $(v_n)$ بـ: من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_n=u_n-9n+30$.

أ) برهن أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n=9\left[3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+n\right]-30$.

4) نعتبر المتتالية الحسابية $(w_n)$ ذات الأساس 9 وحدها الأول $w_0=-30$

ا) احسب بدلالة $n$ المجموع $L_n=w_0+w_1+w_2+...+w_n$

ب) استنتج بدلالة $n$. المجموع $S_n$ المعرف من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

## التمرين الثالث :(4,5نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر المستقيم $(\Delta_1)$ الذي يشمل النقطة $A(2,-1,5)$ و $\vec{u}(1,-3,2)$ شعاع توجيه له وليكن المستقيم $(\Delta_2)$ المعرف بالجملة: $\begin{cases}3x+y-2=0\\2x-z+3=0\end{cases}$

1)أ.) جد تمثيلا وسيطيا لكل من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.

ب.)بين أن $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ من نفس المستوي .

ج.)أكتب معادلة للمستوي $(P)$ الذي يحوي $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

2)ليكن $(Q_1)$ و $(Q_2)$ مستويين معادلتهما على الترتيب : $x+2y-z+2=0$ و $3x+y+2z-1=0$

أ) بين أن $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متقاطعان وفق مستقيم $(D)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب)عين $(E_1)$ مجموعة النقط $M\,(x,y,z)$ من الفضاء

التي تحقق: $(x+2y-z+2)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$

ج) عين $(E_2)$ مجموعة النقط $N\,(x,y,z)$ من الفضاء

التي تحقق: $(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$

د) تحقق أن : $(E_1)\subset(E_2)$

**التمرين الرابع :(6نقاط)**

I) لتكن الدالة $g$ المعرفة على ℝ بـ: $g(x)=(x-1)e^x$

1)أدرس تغيرات الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها.

2)استنتج إشارة : $g(x)+1$ على ℝ.

II ) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $ℝ^*$ بـالعبارة : $f(x)=x-1-\dfrac{x}{e^x-x-1}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ (لاحظ أن: $f(x)=x-1-\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}-1}$ )

2) بين أنه من اجل كل $x$ من $ℝ^*$ : $f'(x)=1+\dfrac{1+(x-1)e^x}{(e^x-x-1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ) $(\Delta)$ و $(D)$ المستقيمان اللذان معادلتهما على الترتيب : $y=x-1$ و $y=x$

بين أن $(\Delta)$ و $(D)$ مقاربان للمنحني $(C_f)$

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $1\prec\alpha\prec2$ و $-2\prec\beta\prec-1$

ج- استنتج أن $e^\beta-\beta-1=\dfrac{\beta}{\beta-1}$.

6) ارسم $(\Delta)$ و $(D)$ و $(C_f)$ ( نأخذ $\alpha=1;65$ و $\beta=-1;29$)

7) أ) بين أن $\int_{-1}^{\beta}\left(1+\dfrac{x}{e^x-x-1}\right)dx=1+\ln\left(\dfrac{\beta}{\beta-1}\right)$ (لاحظ أن: $1+\dfrac{x}{e^x-x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}$

ب) احسب مساحة حيز المستوي المحصور بين المنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلتها على التوالي: $x=-1$ و $x=\beta$ و $y=x$

**انتهى** **حظ سعيد في امتحان شهادة الباكالوريا**

**التمرين الاول:1)** صحيح التبرير نجد: $\left(1+\sqrt{3}i\right)^4.\left(\sqrt{3}+i\right)^5=2^4e^{i\frac{4\pi}{3}}.2^5e^{i\frac{5\pi}{6}}=2^9e^{\frac{i13\pi}{6}}=256\sqrt{3}+256i$ ن1.....

2) خطأ لأنه بوضع $z=a+ib$ نجد $a^2-b^2+6b-7+2ib(a-3)=0$ ومنه $\begin{cases}a^2-b^2+6a-7=0\\2b(a-3)=0\end{cases}$

الحلول هي: $z_1=1$ , $z_2=-7$ $z_3=3+2\sqrt{5}i$ $z_4=3-2\sqrt{5}i$ ن1.........

3) صحيح لان: بما ان $|z_1|=|z_2|=1$ ن1... فان $\overline{L}=\left(\overline{\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=L$

**4)** صحيح لان: $\arg z_1=\frac{\pi}{6}$ ولدينا $\arg z_1^n=n\arg z_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $n=3+6k$ ن1...........

**5)** صحيح لان : $Z=2i+\frac{\sqrt{2}}{1-i}e^{i\theta}=2i+e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}=2i+e^{i\theta'},\theta'\in\mathbb{R}$ ن1.........

**التمرين الثاني: ( 4,5 نقطة)**

$\begin{cases}u_0=-3\\u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1\end{cases};n\in\mathbb{N}$

1) حساب الحدود: $u_1=-3$ , $u_2=0$ , $u_3=5$ 0,5................

2. أ .البرهان بالتراجع أنه من أجل $n\geq3$ , $u_n\succ0$

ـ نتاكد من صحة الخاصية من أجل $n=3$ : لدينا $u_3\succ0$ محققة 0,25.................

ـ نفرض صحة الخاصية من اجل $n$ أي : $u_n\succ0$ 0,25.................

ـ نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1}\succ0$ 0,25...................

لدينا: و $\begin{cases}n\geq3\\u_n\succ0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3n-1\geq8\\\frac{2}{3}u_n\succ0\end{cases}$ وبالتالي $\frac{2}{3}u_n+3n-1\geq8$ وعليه $u_{n+1}\succ0$.

ب.الاستنتاج: لدينا من أجل $n\geq3$ , $u_n\succ0$

ومنه من أجل $n-1\geq3$ , $u_{n-1}\succ0$ وبالتالي ينتج من أجل $n-1\geq3$ , $\frac{2}{3}u_{n-1}\succ0$, وعليه من أجل $n\geq4$ ,

$\frac{2}{3}u_{n-1}+3n-4\succ3n-4$ إذا من أجل $n\geq4$ , $u_n\succ3n-4$ . 0,5...............

جـ ـ النهاية: بما أن $\lim_{x\to+\infty}(3n-4)=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}u_n=+\infty$ . 0,25...............

3.أ. إثبات أن $(v_n)$ متتالية هندسية

$v_{n+1}=u_{n+1}-9n+21$ ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6n+20$ وبالتالي $v_n=\frac{2}{3}(u_n-9n+30)=\frac{2}{3}v_n$ 0,5...........

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=27$ 0,25 +0,25 ...............

ب ـ الاستنتاج: لدينا $u_n = v_n + 9n - 30$ و $v_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه ينتج

$$u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30 = 9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) - 30$$ 0,5..+..0,25............

4.أ حساب $L_n$

$L_n = w_0 + w_1 + ........w_n$

$$L_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$$ 0,25..................

$$L_n = \frac{n+1}{2}(-60 + 9n)$$

ب. استنتاج $S_n$ حيث $S_n = u_0 + u_1 + .........u_n$

$$S_n = 27.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n+1}{2}(-60+9n)$$

$$S_n = 81\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2}(-60+9n)$$ 0,5.....................

**التمرين الثالث:(4.5ن)**

1.أ) التمثيل الوسيطي لـ$(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

$$(\Delta_1)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-3t \\ z = 5+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\Delta_2)\begin{cases} x = k \\ y = 2-3k \\ z = 3+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$ 0,5+0,5 ................

ب)إثبات أن $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ من نفس المستوي

لدينا: $\vec{u}_1(1;-3;2)$ , $\vec{u}_2(1;-3;2)$

بما أن $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ و $A \notin (\Delta_2)$ فان $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ متوازيان تماما وبالتالي فهما من نفس المستوي. ........0,5

ج) معادلة للمستوي $(p)$ الذي يحوي $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$

$B(0,2,3)$ نقطة من $(\Delta_2)$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$ وليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ $(p)$

لدينا: $\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{n}.\vec{u}_1 = 0\end{cases}$ و ومنه $\begin{cases}-2a+3b-2c=0 \\ a-3b+2c=0\end{cases}$ و بالجمع نجد $a=0$ و بالتعويض نجد $b = \frac{2}{3}c$

ومنه بأخذ $c=3$ نجد $\vec{n}(0,2,3)$ 0,75...............

معادلة $(p)$ هي: $2y+3z+d=0$ و لدينا $B \in (p)$ أي $4+9+d=0$ ومنه $d=-13$

اذا $(p): 2y+3z-13=0$ 0,25.................

2)أ) اثبات أن $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متقاطعان وفق مستقيم

لدينا: $\vec{n}_1(1;2;-1)$ و $\vec{n}_2(3;1;2)$ شعاعي ناظم $(Q_1)$ و $(Q_2)$ على الترتيب

$\vec{n}_1 \neq k\,\vec{n}_2$ ومنه $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متقاطعان وفق مستقيم $(D)$ ...............0,25

التمثيل الوسيطي لـ $(D)$ $\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ 3x+y+2z-1=0 \end{cases}$ ومنه نجد $t'\in\mathbb{R}$ $(D)\begin{cases} x=-\frac{3}{5}-t' \\ y=t' \\ z=\frac{7}{5}+t' \end{cases}$ 0,5.................

ب) مجموعة النقط $(E_1)$

$(x+2y-z+2)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$ معناه $\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ 3x+y+2z-1=0 \end{cases}$ و

مجموعة النقط $(E_1)$ هي المستقيم $(D)$

0,5...........

ج) مجموعة النقط $(E_2)$ التي تحقق: $(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$

$(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$ معناه $(4x+3y+z+1)(-2x+y-3z+3)=0$

ومنه $\begin{cases} 4x+3y+z+1=0 \\ -2x+y-3z+3=0 \end{cases}$ و مجموعة النقط $(E_2)$ هي اتحاد مستويين $(p_1)$ و $(p_2)$ معادلتهما على الترتيب

$4x+3y+z+1=0$ و $-2x+y-3z+3=0$ 0,5.........

د)التحقق من أن: $(E_1)\subset(E_2)$

لدينا: $(D)\subset(P_1)$ لأن : $4\left(-\frac{3}{5}-t'\right)+3t'+\frac{7}{5}+t'+1=-4t'+4t'-\frac{12}{5}+\frac{7}{5}+1=0$ 0,25 .........

ومنه $(E_1)\subset(E_2)$

**التمرين الرابع:(6نقاط)**

**I)تغيرات الدالة** $g$

$g'(x)=xe^x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ 0,25+0,25+0,25................

جدول التغيرات 0,25...........

| $x$ | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | - | + |
| $g(x)$ | 0 ↘ -1 ↗ $+\infty$ |

2)من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x)\geq -1$

وعليه ينتج $g(x)+1\geq 0$ 0,25..................

II) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1-\dfrac{1}{1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{x}})=-\infty$ 0,25...................

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\dfrac{1}{1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{x}})=+\infty$ 0,25...................

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x-1-\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1})=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x-1-\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1})=+\infty$ 0,25+0,25 .....

2)لدينا من أجل كل عدد $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=1+\dfrac{1+(x-1)e^x}{(e^x-x-1)^2}$ 0,25.........

3) لدينا من أجل كل عدد $x$ من $\mathbb{R}^*$ $f'(x)=1+\frac{1+g(x)}{(e^x-x-1)^2}\succ 0$ ومنه $f$ متزايدة تماما ................0,25

جدول التغيرات ..........................................................0,25

| $x$ | $-\infty$      $0$      $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

4)أ) لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$

ومنه $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ ...............0,25

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ فان $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ ................0,25 .

ب) مبرهنة القيم المتوسطة

بما أن $f$ مستمرة ومتزايدة تماماعلى المجال $]1,2[$ و $f(1)=-1,21$ و $f(1)=0,6$ فانه يوجد $\alpha$ محصور بين 1و 2

و $f(\alpha)=0$ ..........................0,25

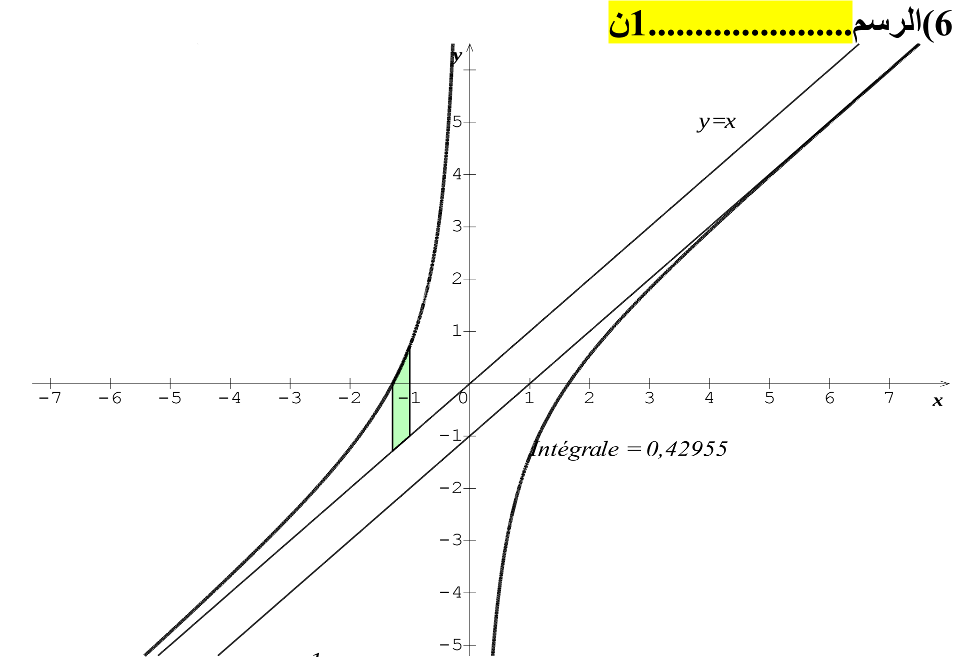
بما أن $f$ مستمرة ومتناقصة تماماعلى المجال $]-2,-1[$ و $f(-1)=0,7$ و $f(-2)=-1,13$ فانه يوجد $\beta$ محصور

بين 1- و 2- و $f(\beta)=0$ ......................0,25

ج) الاستنتاج : لدينا $f(\beta)=0$ ومنه $\beta-1-\frac{\beta}{e^\beta-\beta-1}=0$ معناه $\beta-1=\frac{\beta}{e^\beta-\beta-1}$ وعليه $e^\beta-\beta-1=\frac{\beta}{\beta-1}$

................................0,25

**6)الرسم......................1ن**




7) أ) $\int_{-1}^{\beta} 1+\frac{x}{e^x-x-1}dx=\int_{-1}^{\beta}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}dx=\ln\left|e^x-x-1\right|_{-1}^{\beta}=\ln\left(e^\beta-\beta-1\right)-\ln\left(e^{-1}\right)=1+\ln\frac{\beta}{\beta-1}$

0,5..........................................................

ب) حساب المساحة

$A=\int_{\beta}^{-1}(f(x)-x)dx=\int_{\beta}^{-1}-1-\frac{x}{e^x-x-1}dx=-1-\ln\frac{\beta}{\beta-1}=0,42u.a$ ....................0,25

**الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات**
**السنة الدراسية: 2009-2010**

الشعبة: 3 ر + 3 ت ر    التاريخ : 2010/05/24    المدة: 4 ساعات ونصف

## الموضوع الأول

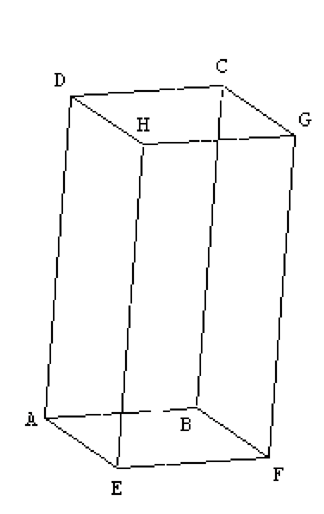
### التمرين الأول :

لكل جملة من الجمل الآتية قدم برهانا إذا كانت صحيحة ومثالا مضادا إذا كانت خاطئة

1) العدد الطبيعي 2009 أولي .
2) العددان 2009 و 1430 أوليان فيما بينهما.
3) المعادلة $2009x + 21y = 7$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$
4) حلول المعادلة $24x + 35y = 9$ في $\mathbb{Z}^2$ هي الثنائيات $(70k-144\ ;\ 99-24k)$ حيث k عدد صحيح .
5) يوجد نظام تعداد يكتب فيه العدد 2009 على الشكل $\overline{809}$ .

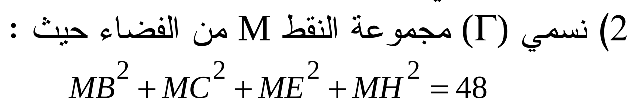
### التمرين الثاني :

ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث : $AB = AE = 2$ و $AD = 4$ . نسمي I مركز المربع ABFE و J منتصف القطعة [EH] . ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(A\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$




1) * عين إحداثيات كل نقطة من النقط B ، C ، E ، F ، H ثم I و J .
 * عين مركبات كل شعاع من الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{JC}$
 * بين أن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ شعاع ناظم للمستوي (IJC) .
 * عين معادلة ديكارتية للمستوي (IJC) ثم تحقق أن النقط B ، C ، E ، H تنتمي إليه .

2) نسمي $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من الفضاء حيث :



$$MB^2 + MC^2 + ME^2 + MH^2 = 48$$

 * بين أن $(\Gamma)$ سطح كرة يطلب تحديد إحداثيات مركزها $\omega$ ونصف قطرها .
 * تحقق أن النقطة $\omega$ مركز ثقل المثلث IJC .
 * عين نصف القطر و إحداثيات مركز الدائرة $(\gamma)$ المحيطة بالمستطيل EBCH .
 * استنتج تمثيلا ديكارتيا للدائرة $(\gamma)$ .

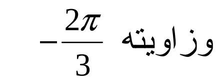
### التمرين الثالث:



1) حل في مجموعة العداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 + z + 1 = 0$ .
 نسمي $j$ الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

2) اكتب العددين $j$ و $\frac{1}{j}$ على الشكل الأسي.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.نعتبر النقطتين A لاحقتها $\alpha = 2+i$ و M لاحقتها z . نسمي B النقطة ذات اللاحقة $\beta = \alpha j$ و M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$



- عبر عن 'z لاحقة 'M بدلالة z و $j$ .
- اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$ .
- عين طويلة وعمدة العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$. فسر النتيجتين هندسيا .
- عين على الرسم النقطتين B و 'M لما $z=1+3i$ .

**التمرين الرابع :**

الجزء الأول: φ الدالة العددية المعرفة على **R** كمايلي $\varphi(x) = 2(x^2+1).e^{-x} - 1$

1) * احسب نهاية φ عند ∞- و عند ∞ + .
*ادرس اتجاه تغيرات الدالة φ ثم أنجز جدول تغيراتها

2) * بين أن المعادلة φ (x) = 0 تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3] ثم عين حصر للعدد α سعته $10^{-1}$.
* أنجز جدول إشارة φ(x) .

الجزء الثاني : ( دراسة وضعية منحنيين و حساب مساحة)

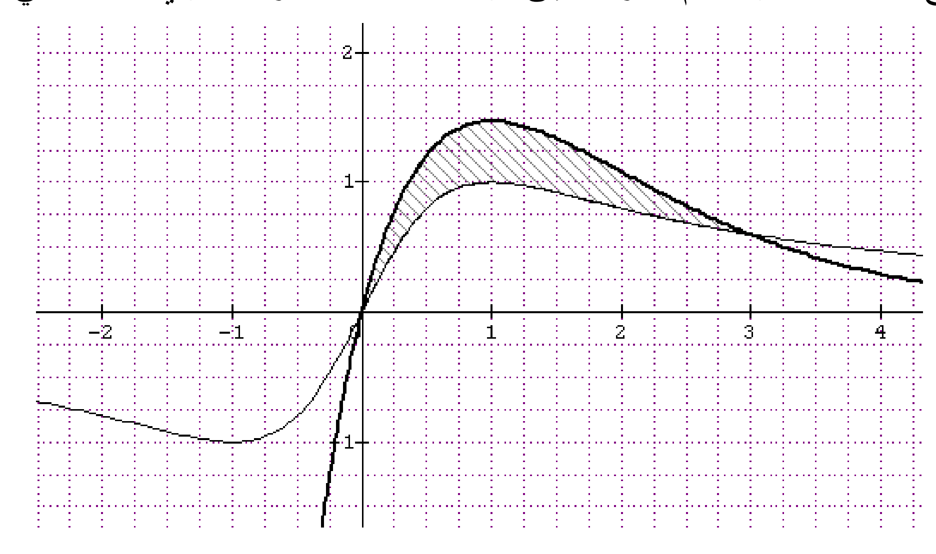
تعطى في آخر الموضوع التمثيلين البيانيين ، الأول للدالة f و الثاني للدالة g المعرفتين على **R** كما يلي : $f(x) = 4x.e^{-x}$ و $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

نسمي $(C_f)$ منحنى f و $(C_g)$ منحنى g . في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : 2cm)

1) *بين أن المنحنيين يشملان النقطة o مبدأ المعلم.
* اكتب معادلة المماس لكل من $(C_f)$ و $(C_g)$ عند النقطة o.

2) *بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) - f(x) = \frac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$ ، حيث φ الدالة المدروسة في الجزء الأول.
* ادرس إشارة g(x) – f(x)
* استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$.

3) * بين أن الدالة h المعرفة على **R** كمايلي : $h(x) = \ln(x^2+1) + (4x+4).e^{-x}$ دالة أصلية للدالة g(x) – f(x) على **R**.
*استنتج القيمة المضبوطة ثم التقريبية إلى الوحدة لمساحة الحيز المستوي المضلل في الرسم



ثانوية الشهيد محمد بوعايسي - الشلف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

السنة الدراسية: 2009-2010

الشعبة: 3 ر + 3 ت ر | التاريخ : 2010/05/24 | المدة: 4 ساعات ونصف

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم.

3) * بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n اكبر أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n\,,\,n+3\right)=PGCD(48\,,\,n+3)$

( $PGCD(a\,,b)$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a و b )

* عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 .

* استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

**التمرين الثاني** : نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ .

1) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ . استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن $f(x)\in[1;2]$ .

2) $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرفتان بـ : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$،

$u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$ .

مثل منحني الدالة والمستقيم ذي المعادلة $y=x$ . أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$.

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

" $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ "

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$ .

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ .
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
- استنتج أن للمتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ نفس النهاية $l$.
- عين القيمة المضبوطة للعدد $l$ .

**التمرين الثالث:** 1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة التالية : $z^2 - 4\bar{z} + 8 = 0$ .

2) نعتبر، في المجموعة $\mathbb{C}$، كثير الحدود التالي : $p(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 2)z^2 - 8(\sqrt{2} - 1)z + 16\sqrt{2}$ .

ا) احسب $p(-2\sqrt{2})$، ثم عيّن العددين الحقيقيّين a و b بحيث : $p(z)=(z+2\sqrt{2})(z^2+az+b)$ .

ب)حل، في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلة $p(z) = 0$ .

3) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$.

لتكن النقط A، B، C التي لواحقها $z_A = 2 + 2i$، $z_B = 2 - 2i$، $z_C = -2\sqrt{2}$ على الترتيب .

ا) عيّن طويلة وعمدة كلٍّ من $z_A$ و $z_B$، ثم تحقق أنّ العدد $z_A^{2010}$ تخيلي صرف.

ب) بيّن أنّ النقط A، B، C تقع على نفس الدائرة (c) التي مركزها المبدأ O و التي يطلب تعيين نصف قطرها.

جـ)علّم النقط A، B، C، ثم عيّن قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$ واستنتج أنّ $\frac{3\pi}{8}$ هو قيس للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

د) بيّن أنّ: $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ .

**التمرين الرابع :** f الدالة العددية المعرفة على $[0 ; +\infty[$ كما يأتي:

f(0)=0 ومن أجل x ينتمي إلى $]0 ; +\infty[$ : $f(x) = x^2(1 - 2\ln(x))$

نسمي $(C_f)$ منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) * احسب نهاية f عند $+\infty$

* بين أن $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا

*بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ وأن $f'(x) = -4x\ln(x)$ ( $f'$ ترمز للدالة المشتقة لـــ f )

* ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) * عين إحداثيات نقطتي تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل

* اكتب معادلة للمماس (d) لـــ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

* أنشئ المنحنى $(C_f)$ والمماس (d) . ( الوحدة : 3 cm )

3) * بين أن الدالة g المعرفة بـــ $g(x) = \frac{x^3}{9}(5 - 6\ln(x))$ دالة أصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$ .

* λ عدد حقيقي من المجال $]0 ; \sqrt{e}[$ . احسب بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = \lambda$ و $x = \sqrt{e}$ .

- احسب نهاية $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى 0 .

## تصحيح الموضوع الأول

**التمرين الأول : ( 3 نقاط)**

1) الجملة خاطئة لأن : $2009 = 7 \times 287$ أي 7 يقسم 2009 . **0.5**

2) الجملة صحيحة لأن : $2009 = 7 \times 287$ و $1430 = 2\times5\times 11\times 13$
و $PGCD(2009,1430) = 1$ . **0.5**

3) الجملة صحيحة لأن المعادلة المعطاة تكافئ : $287x + 3y = 1$ وبما أن 287 و 3 أوليان فيما بينهما
فإن حسب نظرية بيزو توجد على الأقل ثنائية $(\alpha , \beta)$ تحقق $287\alpha + 3\beta = 1$ . **01**

4) الجملة خاطئة لأن من أجل $k = 2$ ( مثلا) الثنائية $(-4 , 51)$ ليست حلا للمعادلة المعطاة فعلا
$24(-4) + 35(51) = 1689$ و $1689 \neq 9$ . **0.5**

5) الجملة خاطئة لأنه لايوجد أي عدد طبيعي a يحقق : $a > 9$ و $8a^2 + 0\times a + 9 = 2009$ لأن هذه
المعادلة تكافئ $a^2 = 250$ ولايوجد أي عدد طبيعي مربعه يساوي 250 . **0.5**

**التمرين الثاني : ( 6 نقاط)**

1) * إحداثيات كل نقطة من النقط B ، C ، E ، F ، H ثم I و J .
$B(2,0,0)$ ، $C(2,4,0)$ ، $E(0,0,2)$ ، $F(2,0,2)$ ، $H(0,4,2)$
I منتصف [AF] : $I(1,0,1)$ و $J(0,2,2)$ **نقطة**

* مركبات الشعاع $\overrightarrow{IJ}$ و الشعاع $\overrightarrow{JC}$ : $\overrightarrow{IJ}(-1,2,1)$ و $\overrightarrow{JC}(2,2,-2)$ **0.5**

* بما أن : $\overrightarrow{AF}(2,0,2)$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{IJ} = -2+0+2 = 0$ و $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{JC} = 2\times2+0\times2+2\times(-2) = 0$
نستنتج أن $\overrightarrow{AF}$ عمودي على $\overrightarrow{IJ}$ وعمودي على $\overrightarrow{JC}$ فهو شعاع ناظم للمستوي (IJC) **0.75**

* المستوي (IJC) يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AF}$ شعاع ناظمي له معادلته تكتب
$2(x-2) + 0(y-4) + 2(z-0) = 0$ أي $x + z = 2$ **0.5**

النقط B ، C ، E ، H تنتمي إلى المستوي (IJC) لأن إحداثيات كل نقطة من هذه النقط تحقق
المعادلة $x + z = 2$ فعلا : $2 + 0 = 2 + 0 = 0 + 2 = 0 + 2 = 2$ **0.5**

2) $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $MB^2 + MC^2 + ME^2 + MH^2 = 48$
* نفرض $M(x,y,z)$ . لدينا :

$$MB^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4$$

$$MC^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 20$$

$$ME^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4$$ **نقطة**

$$MH^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 4z + 20 .$$

نستنتج أن النقطة M تنتمي إلى $(\Gamma)$ إذا وفقط إذا :

$4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y-8z+48=48$ أي $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ **0.25**

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0$ تكافئ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ **0.25**

$(\Gamma)$ سطح الكرة التي مركزها النقطة $\omega(1\ ,2\ ,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$ **0.25**

* إحداثيات مركز ثقل المثلث IJC هي : $\left(\frac{x_I+x_J+x_C}{3}, \frac{y_I+y_J+y_C}{3}, \frac{z_I+z_J+z_C}{3}\right)$

بما أن $\frac{x_I+x_J+x_C}{3}=\frac{1+0+2}{3}=1$ و $\frac{y_I+y_J+y_C}{3}=\frac{0+2+4}{3}=2$ و $\frac{z_I+z_J+z_C}{3}=\frac{1+2+0}{3}=1$

نستنتج أن مركز ثقل المثلث IJC هي النقطة $\omega$ **0.25**

* نصف القطر و إحداثيات مركز الدائرة $(\gamma)$ المحيطة بالمستطيل EBCH .

بما أن المثلث EHC قائم في H فإن قطر $(\gamma)$ يساوي طول الوتر EC ومركزها منتصف [EC]

بما أن $EC=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ نستنتج أن نصف قطر $(\gamma)$ يساوي $\sqrt{6}$ **0.5**

و إحداثيات مركزها : $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ أي $(1\ ,2\ ,1)$ وهي النقطة $\omega$ .

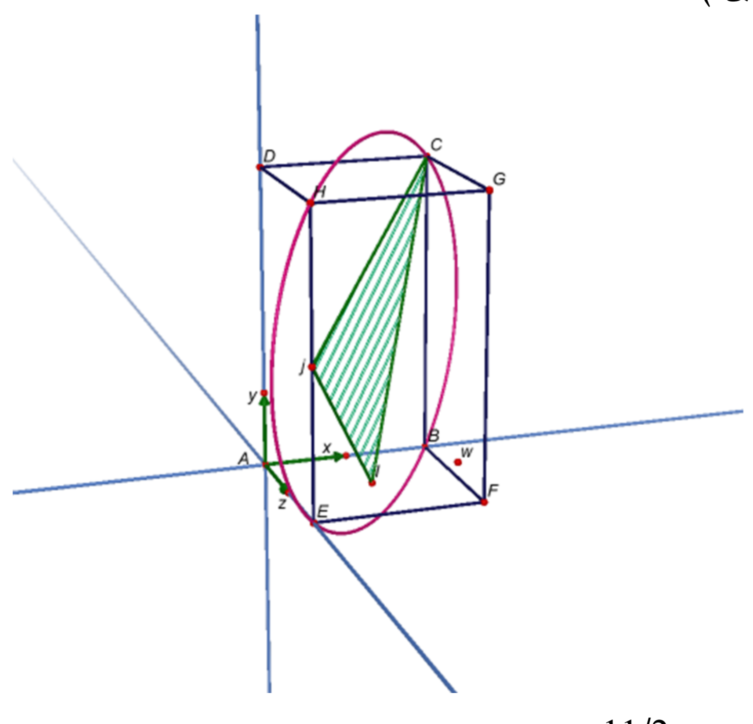
* تمثيل ديكارتي للدائرة $(\gamma)$ :

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6\\ x+z=2\end{cases}$$ **0.25**

لأن كل نقطة من $(\gamma)$ تبعد عن المركز $\omega$ بنفس المسافة $\sqrt{6}$ و نقط $(\gamma)$ تنتمي إلى المستوي (IJC)

( لأن ثلاث نقط من $(\gamma)$ تنتمي إلى المستوي (IJC) وهي B ، C ، E ) .

إليك الرسم للتوضيح ( غير مطلوب في التمرين )



**التمرين الثالث :** ( 3.5 نقطة ) :

1) حل المعادلة ذات المجهول z : $z^2+z+1=0$ :

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=3i^2$ و $z'=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{j}$ **0.5**

2) $|j|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و $\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ نستنتج أن : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $\frac{1}{j}=\bar{j}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ **0.5**

3) * M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ تعني أن :

$z'-0=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ نستنتج أن : $z'=\frac{1}{j}z$ . **0.5**

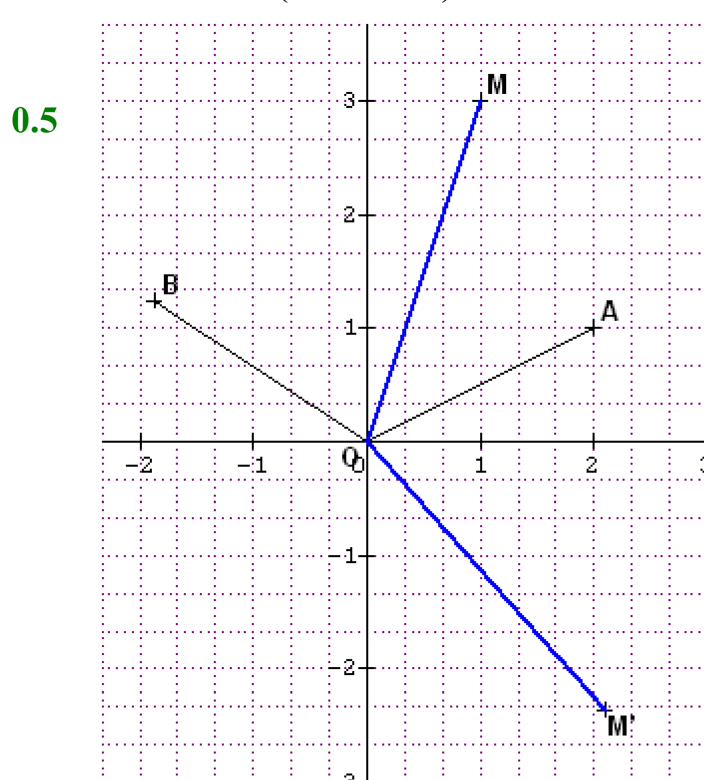
* الشكل الجبري العدد $\frac{z-\beta}{z'-\alpha}$ : ( نفرض $z'-\alpha\neq0$ أي $z-\beta\neq0$ )

$$\frac{z-\beta}{z'-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{1}{j}z-\alpha}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\alpha j}{j}}=\frac{z-\beta}{\frac{z-\beta}{j}}=(z-\beta)\times\frac{j}{(z-\beta)}=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **0.5**

* $\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=|j|=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\arg(j)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

$\left|\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right|=1$ تكافئ $\frac{BM}{AM'}=1$ و $\arg\left(\frac{z-\beta}{z'-\alpha}\right)=\frac{2\pi}{3}$ تكافئ $\left(\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{2\pi}{3}$ **0.5**

* الرسم : **0.5**



**التمرين الرابع** ( 7 نقاط)

**الجزء الأول** : φ الدالة العددية المعرفة على **R** كمايلي : $\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1$

1) * لما x يؤول إلى ∞- فإن $e^{-x}$ يؤول إلى ∞ + و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ +

نستنتج أن $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ **0.25**

* لما x يؤول إلى ∞+ فإن $e^{-x}$ يؤول إلى 0 و $2(x^2+1)$ يؤول إلى ∞ + ، حالة عدم التعيين .

$\varphi(x)=2(x^2+1).e^{-x}-1=2\frac{x^2+1}{e^x}-1=2\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)-1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$ **0.5**

* دراسة اتجاه تغير الدالة φ : الدالة φ قابلة للاشتقاق على **R** . من أجل كل عدد حقيقي x من **R**

$\varphi'(x)=2\left(2x\times e^{-x}+(x^2+1).(-e^{-x})\right)=2e^{-x}\left(2x-x^2-1\right)=-2\left(x-1\right)^2e^{-x}$ **0.5**

$\varphi'(x)=0$ تكافئ $(x-1)^2=0$ أي $x=1$ ومهما يكن x من **R** : $\varphi'(x)\leq0$

الدالة φ متناقصة على **R**. **0.5**

جدول تغيرات φ : **0.25**

| x | - ∞ | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | - | 0 | - |
| $\varphi(x)$ | +∞ | ↘ | -1 |

2) * نبين أن المعادلة 0 = (x) φ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3]

الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على [2 ;3] ،

$\varphi(2)=2\left(2^2+1\right)e^{-2}-1\approx0.35$ ، $\varphi(3)=2\left(3^2+1\right)e^{-3}-1\approx-0.004$ بما أن $\varphi(3)\leq0\leq\varphi(2)$

حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة 0 = (x) φ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال [2 ;3] **0.5**

بما أن $\varphi(2.9)\approx0.035$ فإن α ينتمي إلى المجال [2,99 ;3] . **0.25**

* جدول إشارة (x) φ : **0.25**

| x | - ∞ | α | +∞ |
|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | + | 0 | - |

**الجزء الثاني** : $f(x)=4x.e^{-x}$ ، $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

1) * المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ يشملان مبدأ المعلم O لأن $f(0)=4\times0.e^{-0}=0$ و $g(0)=\frac{2\times0}{0^2+1}=0$ **0.25**

* معادلة المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة o.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(x)= 4\left(1\times e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)\right)=4(1-x)e^{-x}$ ومنه

$f'(0)= 4(1-0)e^{-0}=4$ معادلة المماس تكتب : y = 4x . **0.5**

* معادلة المماس للمنحنى $(C_g)$ عند النقطة o.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(x)=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه

$g'(0)=\dfrac{2(1-0)}{(0+1)^2}=2$ معادلة المماس تكتب : y = 2x . **0.5**

2) * نبين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)-f(x)=\dfrac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

$$g(x)-f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-4xe^{-x}=\frac{2x-\left(x^2+1\right)4xe^{-x}}{x^2+1}=\frac{-2x\left(2\left(x^2+1\right)e^{-x}-1\right)}{x^2+1}=\frac{-2x\varphi(x)}{x^2+1}$$ **0.25**

* دراسة إشارة g(x) – f(x) : **0.5**

| x | - ∞ | | 0 | | α | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | | + | | + | 0 | - | |
| -2x | | + | 0 | - | | - | |
| $-2x\varphi(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

* الوضعية النسبية للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$.

المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ يتقاطعان في النقطتين O مبدأ المعلم والنقطة التي إحداثياتها (α , 0) .

لما x ينتمي إلى أحد المجالين ] 0 ; ∞ - ] أو ] α ; + ∞ [ فإن $(C_g)$ أعلى $(C_f)$.

لما x ينتمي إلى ] 0 ; α [ فإن $(C_g)$ أسفل $(C_f)$. **0.5**

3) * الدالة h حيث $h(x) = \ln(x^2+1) + (4x+4).e^{-x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على **R**

مهما يكن العدد الحقيقي x من **R** :

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}+4e^{-x}+(4x+4).\left(-e^{-x}\right)=\frac{2x}{x^2+1}-4xe^{-x}=g(x)-f(x)$$ **0.5**

نستنتج أن h دالة أصلية للدالة g – f على **R**

* مساحة الحيز المستوى المضلل في الرسم : نسمي S هذه المساحة

$$S=\int_0^{\alpha}\left(f(x)-g(x)\right)dx=-\left[h(x)\right]_0^{\alpha}=-\left[\ln\left(\alpha^2+1\right)+(4\alpha+4)e^{-\alpha}-4\right]=4-\ln\left(\alpha^2+1\right)-(4\alpha+4)e^{-\alpha}$$

قيمة مقربة لــ S : بأخذ α ≈2.9 نجد $S\approx 1u.a\approx 4cm^2$ . **0.5+ 0.5**

## تصحيح الموضوع الثاني

**التمرين الأول : ( 4 نقاط)**

1) باستعمال طريقة هورنر (أو القسمةالاقليدية أو المطابقة) نبين أن $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

| | 3 | 0 | -11 | 48 |
|---|---|---|---|---|
| -3 | 0 | -9 | 27 | -48 |
| 0 | 3 | -9 | 16 | 0 |

نستنتج أن : $3n^3-11n+48=(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$ أي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$ . **0.5**

2) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم. :

بما أن $3n^3$ و $9n$ و $16$ أعداد طبيعية يكفي أن نبين أن $3n^2-9n+16\succ 0$ لذلك نحسب المميز

بما أن $\Delta=9^2-4\times3\times16=-111$ ، $\Delta\prec 0$ ومعامل $n^2$ موجب نستنتج أن $3n^2-9n+16\succ 0$ . **0.5**

3) * نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n اكبر أو يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n\ ,\ \text{n}+3\right)=PGCD(48\ ,\ \text{n}+3)$

يكفي أن نبين كل قاسم مشترك للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ كذلك قاسم مشترك للعددين $n+3$ و $48$ .

أولا : يكون العدد $3n^3-11n$ طبيعيا إذا كان $n\left(3n^2-11\right)\succ 0$ أي $n^2\succ\frac{11}{3}$ أي $n\geq 2$ .

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين $3n^3-11n$ و $n+3$ فإنه يقسم العدد $3n^3-11n-(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$ أي يقسم العدد 48 . **0.5**

عكسيا كل قاسم مشترك d للعددين $n+3$ و 48 يقسم كذلك العدد $(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-48$ أي يقسم العدد $3n^3-11n$ . **0.5**

نستنتج أن : $PGCD\left(3n^3-11n\ ,\ \text{n}+3\right)=PGCD(48\ ,\ \text{n}+3)$

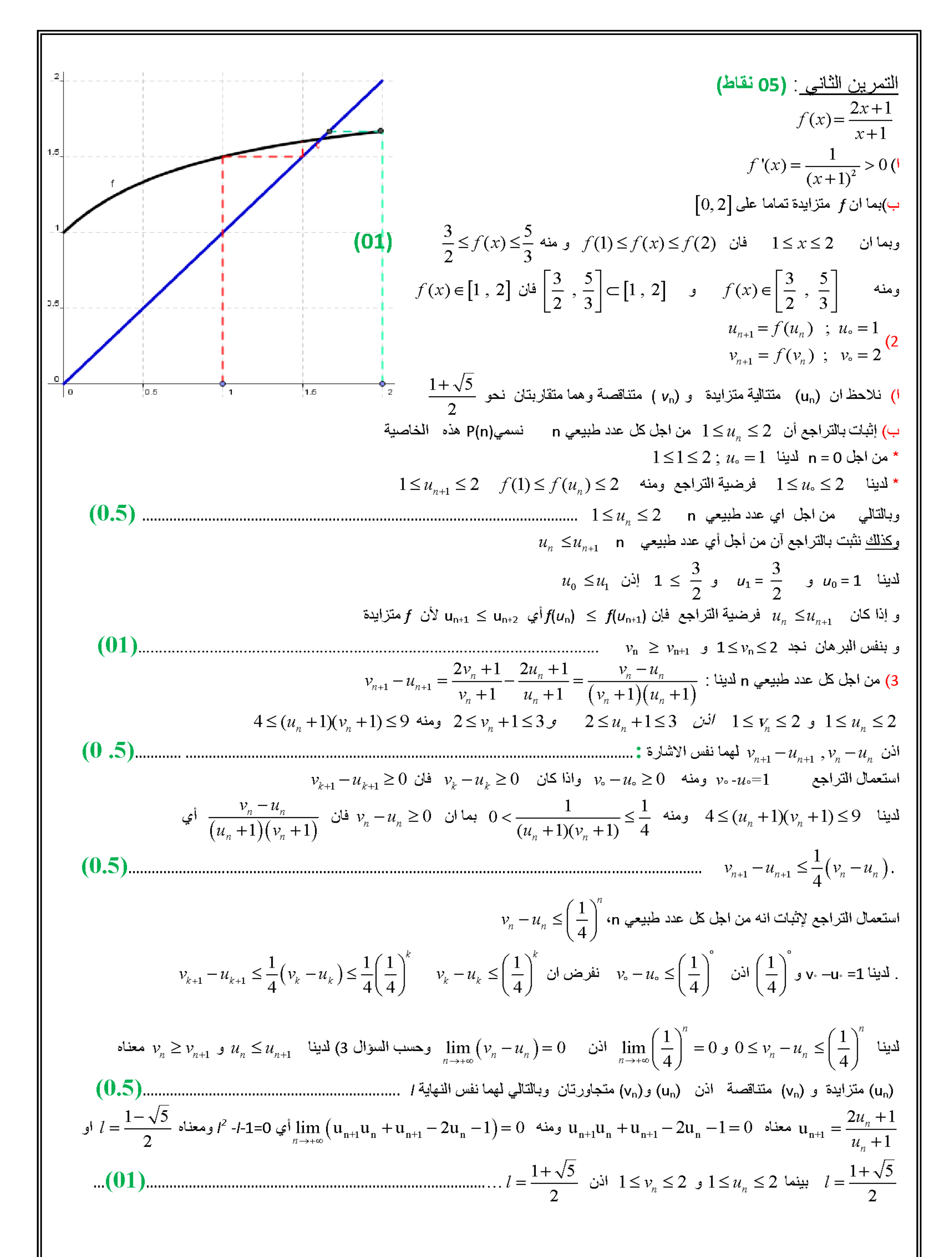
* مجموعة قواسم العدد 48 : نسمي D مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 : بماأن : $48=2^4\times3$ فإن عدد قواسم العدد 48 يساوي 10 نستنتج أن : $D=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$ . **0.5**

* مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا.

يكون العدد $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ طبيعيا إذا كان $n\geq 2$ و $n+3$ قاسما للعدد $3n^3-11n$ ، أي $n+3$ قاسما مشتركا لـــ $n+3$ و $3n^3-11n$ حتى يتحقق ذلك يكفي أن يكون $n+3$ قاسما للعدد 48 . **0.5**

نستنتج أن $n+3$ ينتمي إلى D و منه $n$ ينتمي إلى $\{3,5,9,13,21,45\}$ ( لاتنس أن $n\geq 2$ ) . **0.5+ 0.5**

ملاحظة : يمكن استعمال الشكل $\frac{3n^3-11n}{n+3}=3n^2-9n+16-\frac{48}{n+3}$



التمرين الثاني : (05 نقاط)

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

أ) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$

ب)بما ان $f$ متزايدة تماما على $[0,2]$

وبما ان $1\le x\le 2$ فان $f(1)\le f(x)\le f(2)$ و منه $\dfrac{3}{2}\le f(x)\le\dfrac{5}{3}$ **(01)**

ومنه $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right]$ و $\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3}\right]\subset[1,2]$ فان $f(x)\in[1,2]$

2) $u_{n+1}=f(u_n)$ ; $u_0=1$

$v_{n+1}=f(v_n)$ ; $v_0=2$

أ) نلاحظ ان $(u_n)$ متتالية متزايدة و $(v_n)$ متناقصة وهما متقاربتان نحو $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ب) إثبات بالتراجع أن $1\le u_n\le 2$ من اجل كل عدد طبيعي n نسمي P(n) هذه الخاصية

* من اجل n = 0 لدينا $u_0=1$ ; $1\le 1\le 2$

* لدينا $1\le u_0\le 2$ فرضية التراجع ومنه $f(1)\le f(u_n)\le 2$ $1\le u_{n+1}\le 2$

وبالتالي من اجل اي عدد طبيعي n $1\le u_n\le 2$ ............................................................ **(0.5)**

وكذلك نثبت بالتراجع آن من أجل أي عدد طبيعي n $u_n\le u_{n+1}$

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\dfrac{3}{2}$ و $1\le\dfrac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$

و إذا كان $u_n\le u_{n+1}$ فرضية التراجع فإن $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$ لأن $f$ متزايدة

و بنفس البرهان نجد $1\le v_n\le 2$ و $v_n\ge v_{n+1}$ ............................................................ **(01)**

3) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{2v_n+1}{v_n+1}-\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $2\le u_n+1\le 3$ و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$

اذن $v_n-u_n$ , $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الاشارة : ............................................................ **(0 .5)**

استعمال التراجع $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ واذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فان $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه $\dfrac{1}{4}\ge\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}>0$ بما ان $v_n-u_n\ge 0$ فان $\dfrac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$ أي

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$. ............................................................ **(0.5)**

استعمال التراجع لإثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ اذن $v_0-u_0\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ نفرض ان $v_k-u_k\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$ $v_{k+1}-u_{k+1}\le\dfrac{1}{4}(v_k-u_k)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n\le u_{n+1}$ و $v_n\ge v_{n+1}$ معناه

$(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة اذن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية $l$ ............................................................ **(0.5)**

$u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1)=0$ أي $l^2-l-1=0$ ومعناه $l=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ او

$l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ بينما $1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ............................................................ **(01)**

## التمرين الثالث (04 نقاط و نصف)

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$

$\Delta' = 4-8 = -4 = 4i^2$ إذن $z = 2-2i$ أو $z = 2+2i$ ......... 0.5

2/ ليكن كثير الحدود $P(z)=z^3+2\left(\sqrt{2}-2\right)z^2-8\left(\sqrt{2}-1\right)z+16\sqrt{2}$

أ) حساب $P\left(-2\sqrt{2}\right)$

$$P\left(-2\sqrt{2}\right)=\left(-2\sqrt{2}\right)^3+2\left(\sqrt{2}-2\right)\left(-2\sqrt{2}\right)^2-8\left(\sqrt{2}-1\right)\left(-2\sqrt{2}\right)+16\sqrt{2}$$
$$=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}-32+32-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}$$
$$=0$$
0.25....................

باستعمال الخوارزمية هورنر نجد

| | $-2\sqrt{2}$ | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $2\left(\sqrt{2}-2\right)$<br>$-2\sqrt{2}$ | $-8\left(\sqrt{2}-1\right)$<br>$8\sqrt{2}$ | $16\sqrt{2}$<br>$-16\sqrt{2}$ |
| 1 | -4 | 8 | 0 |

0.5...

إذن $a = 1$ , $b = -4$ و$c = 8$

ب) $P(z)=0$ معناه $\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2-4z+8\right)=0$

معناه $z=-2\sqrt{2}$ أو $z=2-2i$ أو $z=2+2i$ ........................... 0.25

3/ لدينا $z_A=2-2i$ , , $z_B=2-2i$ , $z_C=-2\sqrt{2}$

أ) $z_A=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ || $z_B=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right]$

0.5 + 0.5.....................




ومنه $z_A^{2010}=\left[2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]^{2010}=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2010},\ \frac{2010\pi}{4}\right]$

$$z_A^{2010}=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}\ ;\ 502\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]=\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}i$$
0.5.........

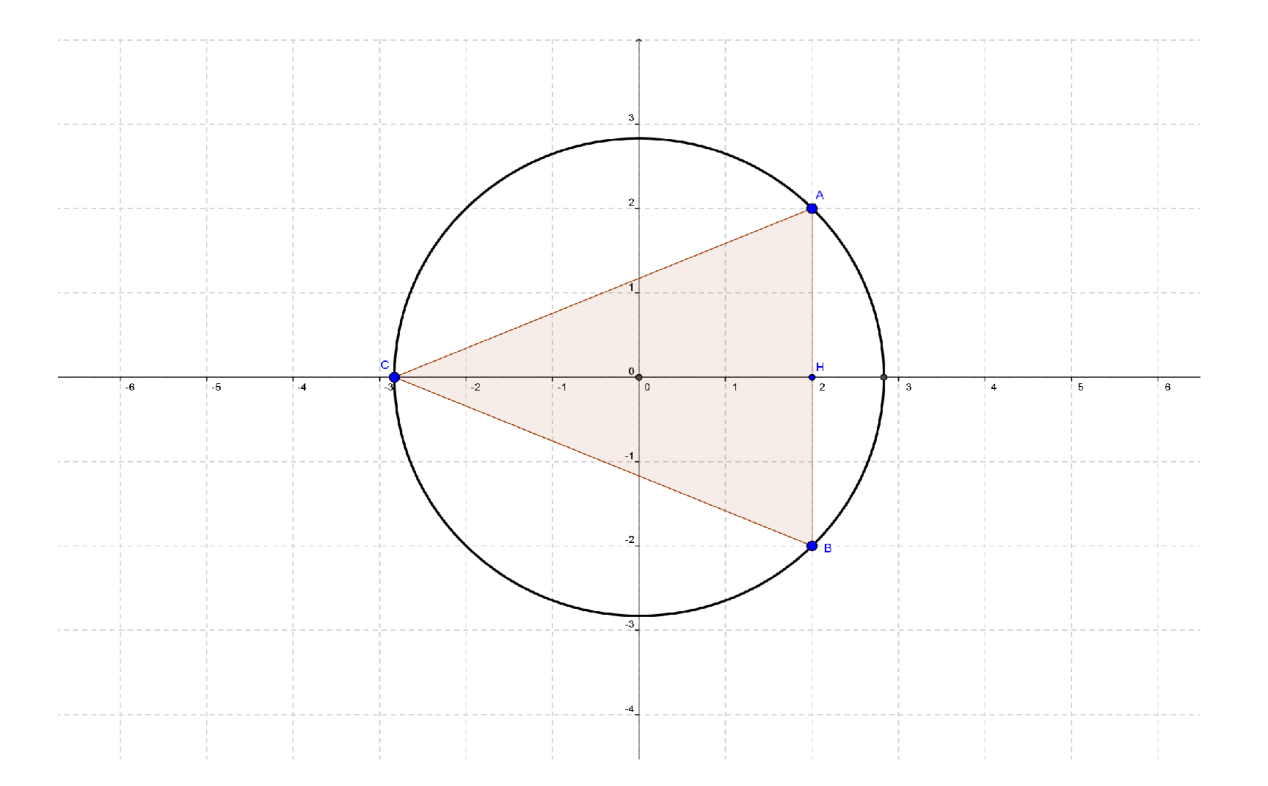
ب) بما أن $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ فان A،B وC تقع على نفس الدائرة التي مركزها o ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ .....0.5

جـ) لدينا بعد الحساب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ أي $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\frac{\pi}{4}$

ومنه $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{4}$ ....0.5

وبما ان مجموع زوايا المثلث هو $\pi$ نجد ان $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{3\pi}{8}$.........................**0.25**

د) من الشكل نلاحظ ان $tan\frac{3\pi}{8}=\frac{CH}{AH}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$...............................**0.25**




**<u>التمرين الرابع</u> : ( 6 نقاط ونصف)**

f الدالة العددية المعرفة على $[0\ ;+\infty[$ كما يأتي:

f(0)=0 ومن أجل x ينتمي إلى $]0\ ;+\infty[\ :\ f(x)=x^2(1-2\ln(x))$

1) * نهاية f عند ∞ + : لما x يؤول إلى ∞ + فإن $x^2$ يؤول إلى ∞ + و $1-2\ln(x)$ يؤول إلى ∞ −
نستنتج أن لما x يؤول إلى ∞ + f(x) يؤول إلى ∞ − **0.25**

* حساب $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ : لدينا $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2(1-2\ln(x))}{x}=x-2x\ln(x)$ ونعلم أن $\lim_{x\to 0}x\ln(x)=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ . **0.25**

التفسير الهندسي : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 والمماس عند هذه النقطة يوازي محور الفواصل **0.25**

* f جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ .

مهما يكن العدد x من $]0\,;+\infty[$ :

$$f'(x)=2x(1-2\ln(x))+x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x-4x\ln(x)-2x=-4x\ln(x)$$ **0.5**

* دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$f'(x)=0$ تكافئ x =0 أو ln(x) =0 أي x = 0 أو x = 1 . **0.25**

$f'(x)\succ 0$ تكافئ $-\ln(x)\succ 0$ أي $\ln(x)\prec 0$ تكافئ $0\prec x\prec 1$ **0.25**

$f'(x)\succ 0$ تكافئ $x\succ 1$ **0.25**

نستنتج أن f متزايدة على $]0\,;1[$ ومتناقصة على المجال $]1\,;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f : **0.5**

| x | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | - ∞ |

2) * إحداثيات نقطتي تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل : هي النقط التي إحداثياتها ( x ,0)
حيث x حلا للمعادلة f(x) = 0 .

المعادلة f(x) = 0 تكافئ $x^2(1-2\ln(x))=0$ أي x =0 أو $1-2\ln(x)=0$ **0.25**

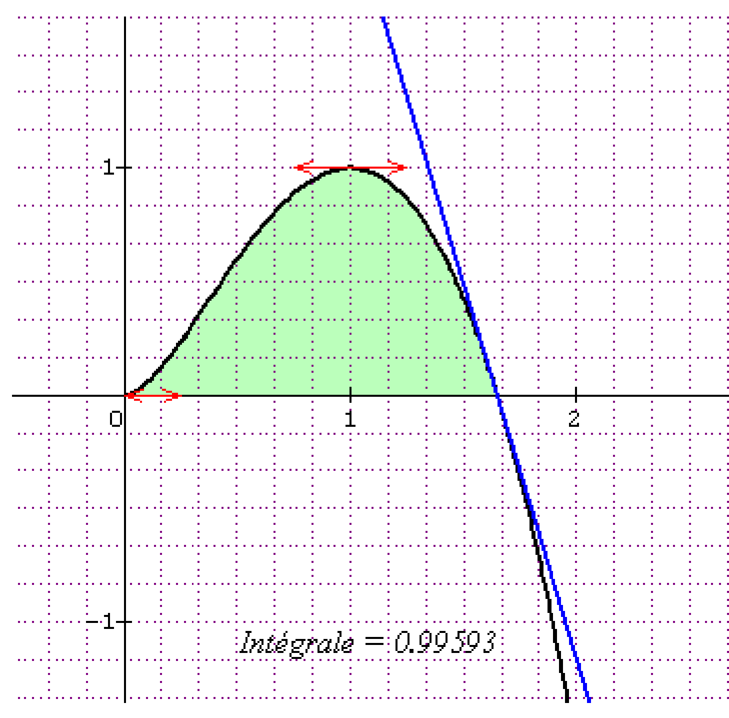
نستنتج أن x = 0 و $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ . نقطتي التقاطع هما : ( 0 , 0) و $(\sqrt{e}\,,0)$. **0.5**

* معادلة المماس (d) لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$:

تكتب هذه المعادلة : $y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$

بما أن $f'(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\ln(\sqrt{e})=-4\sqrt{e}\times\frac{1}{2}=-2\sqrt{e}$ و $f(\sqrt{e})=0$ نستنتج أن $y=-2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})$ **0.5**

* رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ و المماس (d) .




0.75

3) * الدالة g المعرفة بـــ $g(x)=\frac{x^3}{9}(5-6\ln(x))$ دالة أصلية للدالة f على $]0\,;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ ومن جل كل عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$ :

0.5

$$g'(x)=3\frac{x^2}{9}(5-6\ln(x))+\frac{x^3}{9}\left(-6\frac{1}{x}\right)=\frac{5x^2}{3}-\frac{2x^2}{3}-2x^2\ln(x)=x^2-2x^2\ln(x)$$

$$=x^2(1-2\ln(x))=f(x)$$

نستنتج أن الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$ .

0.5

* حساب المساحة $S(\lambda)$ : $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x)dx=[g(x)]_{\lambda}^{\sqrt{e}}=g(\sqrt{e})-g(\lambda)$

$$g(\lambda)=\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda)) \text{ و } g(\sqrt{e})=\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3}{9}\left(5-6\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)=\frac{e\sqrt{e}}{9}\left(5-6\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}$$

0.5

نستنتج أن : $S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}-\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda))$

* بما أن $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^3}{9}(5-6\ln(\lambda))=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\frac{5\lambda^3}{9}-\frac{2\lambda^2}{3}\times\lambda\ln(\lambda)\right)=0-0=0$

0.5

نستنتج أن $\lim\limits_{\lambda\to 0}S(\lambda)=\frac{2e\sqrt{e}}{9}u.a=\frac{2e\sqrt{e}}{9}\times 9cm^2=2e\sqrt{e}\ cm^2$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية دورة : ماي 2010

ثانوية الشهيد محمد بوعيسي – **الشلف**- امتحان بكالوريا التعليم الثانوي(تجريبي)

اختبار في مادة : الرياضيات الشعبة:علوم تجريبية المدة : 3ساعات ونصف

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الأول

التمرين الأول:(3,5نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، ولتكن النقط : $A\left(1,2,-1\right)$ ، $B\left(1,1,0\right)$ ، $C\left(9,-1,-2\right)$ ، $S\left(1,1,1\right)$ ، ومعادلة للمستوي $\left(ABC\right)$ هي : $x+2y+2z-3=0$

لكل سؤال إجابة واحدة صحيحة فقط، اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير

1) تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$ هو:

(أ) $\begin{cases}x=1-t\\y=2-4t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=-1+3t\end{cases}$ (ب) $\begin{cases}x=1\\y=-1-t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=3+t\end{cases}$ (ج) $\begin{cases}x=1\\y=1-2t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=2t\end{cases}$

2)إحداثيات النقطة $S'$ نظيرة النقطة $S$ بالنسبة للمستوي $\left(ABC\right)$هي :

(أ) $\left(\frac{10}{9},\frac{11}{9},\frac{10}{9}\right)$ (ب) $\left(\frac{5}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$ (ج) $\left(\frac{7}{9},\frac{5}{9},\frac{5}{9}\right)$

3) المثلث $ABC$ :

(أ) متساوي الساقين (ب) قائم في $A$ (ج) قائم في $B$

4) مجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$ هي :

(أ) مستوي يشمل $S$ (ب) سطح كرة يشمل $S$ (ج) سطح كرة مركزها $S$

التمرين الثاني:(5نقاط)

الجزء الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: (1)........$z^3-\left(4+i\right)z^2+\left(13+4i\right)z-13i=0$

1) أثبت أن العدد المركب $i$ حلا للمعادلة (1)

2) أوجد الأعداد الحقيقية : $a$ ، $b$ ، $c$ بحيث:

$$z^3-\left(4+i\right)z^2+\left(13+4i\right)z-13i=\left(z-i\right)\left(az^2+bz+c\right)$$

3) أستنتج حلول المعادلة (1)

الجزء الثاني

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط: $A$ ، $B$ ، $C$

التي لواحقها: $z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=2-3i$

1) ليكن R الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، أوجد لاحقة النقطة $A'$ صورة $A$ بهذا الدوران

2) أثبت أن النقط : $A$ ، $B$ ، $C$ ليست على استقامة واحدة ، ثم أوجد العبارة المركبة للتحاكي $h$ الذي مركزه B ويحول $C$ إلى $A'$

<u>التمرين الثالث:</u>(5نقاط)

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{u_n + 3}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-1 < u_n \leq 0$

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)$، وأستنتج أن $(u_n)$ متقاربة

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$

أ ) بين أن $(v_n)$ متتالية حسابية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب ) أحسب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ ج ) أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

4) نضع $S_n = \dfrac{1}{n^2}(v_0 + v_1 + .... + v_n)$ ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$

أن : $\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{3}{n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

<u>التمرين الرابع:</u>(6,5 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 1 + e^{-x}$

نرمز بـ : $(c_g)$ لمنحنى الدالة $g$ و بـ: $(c_{\ln})$ لمنحنى الدالة " اللوغاريتم النيبيري"

1 - أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب ) أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

أستنتج إشارة $f(x)$

2 - نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \ln\left(x + 1 + e^{-x}\right)$

أ ) أدرس تغيرات الدالة $g$

ب ) - بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(g(x) + x\right) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا

- بين أن : $g(x) + x < 0$ من أجل كل $x$ من المجال $]-\infty, -1[$

- بين أن : $0 < g(x) - \ln x \leq \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما ، ثم

أستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty}(g(x) - \ln x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

- ليكن $(\Delta)$ مماس $(c_g)$ في النقطة ذات الفاصلة : 2- ، أكتب معادلة لـ $(\Delta)$

- أنشئ $(c_g)$ و $(c_{\ln})$ و $(\Delta)$ في نفس المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$

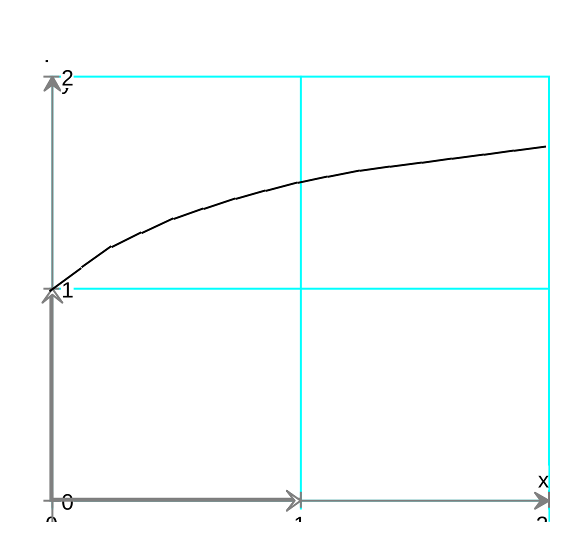
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $x + 1 + e^{-x}\left(1 - e^{m}\right) = 0$

3) نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' + y = x + 2$ ، تأكد أن الدالة $f$ حلا خاصا لهذه المعادلة التفاضلية

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول:(6نقاط)**

$f$ دالة معرفة على المجال $[0,2]$ بـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$




1) - أ) أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,2]$

- ب) أثبت أنه إذا كان $x\in[1,2]$ فإن $f(x)\in[1,2]$

2) - $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

$v_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1}=f(v_n)$

أ) المنحنى المقابل هو منحنى الدالة $f$ في المجال $[0,2]$

- أنشئ على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$

- أعط تخمينا حول اتجاه تغير كل من $(u_n)$ و $(v_n)$ وتقاربهما

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ أن $1\le v_n\le 2$ و $v_{n+1}\le v_n$

وكذلك $1\le u_n\le 2$ و $u_n\le u_{n+1}$

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n-u_n\ge 0$ و $(v_{n+1}-u_{n+1})\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$

د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هـ) أثبت أن $(u_n)$ و $(v_n)$ يتقاربان من نفس العدد $\alpha$، ثم أوجد القيمة المضبوطة لـ $\alpha$

**التمرين الثاني:(3,5 نقاط)**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، $z$ عدد مركب، $\bar{z}$ يرمز إلى مرافق $z$

<u>لكل سؤال إجابة واحدة صحيحة فقط، اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير</u>

1) حل المعادلة : $2z+\bar{z}=9i$ هو : (أ) $3$ (ب) $9i$ (ج) $13+i$

2) $|z+i|=$ (أ) $|z|+1$ (ب) $|z-1|$ (ج) $|i\bar{z}+1|$

3) إذا كانت $Arg(z)=\theta$ فإن $Arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)$ هي :

(أ) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ (ب) $\frac{2\pi}{3}+\theta$ (ج) $\frac{2\pi}{3}-\theta$

4) $n$ عدد طبيعي ، يكون العدد المركب : $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان:

(أ) $n=3$ (ب) $n=6k+3,k\in\mathbb{N}$ (ج) $n=6k,k\in\mathbb{N}$

5) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما : $z_A = i$ و $z_B = -1$

مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $|z-i| = |z+1|$ هي : (أ) المستقيم $(AB)$

(ب) الدائرة ذات القطر $[AB]$ (ج) المستقيم العمودي على $(AB)$ والمار بالمبدأ $o$

<u>التمرين الثالث:</u>(4نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن النقط $C(3,-1,2), B(1,2,1), A(1,1,0)$

1)أ) أثبت أن النقط: $A$، $B$ ، $C$ تعين مستويا، ثم بين أن: $2x+y-z-3=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$

2) ليكن المستويان $(P)$ و $(P')$ حيث: $(P): x+2y-z-4=0$ ، $(P'): 2x+3y-2z-5=0$

أثبت أن تقاطع $(P)$ و $(P')$ هو مستقيم $(\Delta)$ تمثيلا وسيطيا له $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

3) حدد تقاطع المستويات الثلاثة: $(ABC)$ و $(P)$ و $(P')$ ثم أوجد بعد النقطة $A$ عن المستقيم $(\Delta)$

<u>التمرين الرابع:</u> (6,5 نقاط)

لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ :

$f(0)=1$ و $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$ من أجل كل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ ، وليكن $(c_f)$ تمثيلها

البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2cm)

<u>الجزء الأول</u>

1) أ) أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا ب)أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) أدرس قابلية الاشتقاق لـ $f$ عند0 ب) أثبت أن $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ ،أستنتج إتجاه تغير $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

3)أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0,+\infty[$ ،تحقق أن : $4,6<\alpha<4,7$

4) أ) أكتب معادلة للمستقيم $(D)$ مماس $(c_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1

5) لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ) أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة $g'$ ، أستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

ب)أدرس اتجاه تغيرا لدالة $f$ ،أستنتج وضعية $(c_f)$ بالنسبة إلى $(D)$ ج)أحسب $f(6)$ ثم أنشئ $(c_f)$ و $(D)$

<u>الجزء الثاني</u>

1) $n$ عدد طبيعي غير معدوم ،نضع $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,dx$ ،باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n$ بدلالة n

2) أستنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ : $cm^2$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(c_f)$ والمماس $(D)$

والمستقيمين ذا المعادلتين : $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} A(n)$

# الموضوع الأول

**التمرين الأول:** الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$S(1,1,1)$ ; $C(9,-1,-2)$ ; $B(1,1,0)$ ; $A(1,2,-1)$

ومعادلة للمستوى ( ABC) هي $x+2y+2z-3=0$

1/ التمثيل الوسيطي لـ (AB) هو $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=2t \end{cases}$ لان إحداثي كل من A و B تحقق الجملة

2/إحداثي $S'$ نظيرة $S$ بالنسبة للمستوى ( ABC) هي $\left(\frac{5}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$

3/المثلث ABC قائم لان $AB=\sqrt{2}$ , $AC=\sqrt{74}$ ; $BC=\sqrt{72}$ و $AC^2=AB^2+BC^2$

4/ مجموع النقط M هي سطح كرة يشمل S لان لدينا $G(9,0,-3)$ مرجع الجملة $\{(A,1)(B,-1)(C,1)\}$ و $MG=9$ وكذا $SG=9$

**التمرين الثاني**

**الجزء الاول**

لتكن المعادلة $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0 \leftarrow (1)$

1/ إثبات ان $i$ حل المعادلة (1)

لدينا $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=0$

2/ باستعمال خوارزمية HORNER نجد a=1 , b= - 4 ; c=13

| | $i$ | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $-4-i$ | $13+4i$ | $-13i$ |
| | $i$ | $-4i$ | $13i$ |
| 1 | - 4 | 13 | 0 |

3/ (1) يكافئ $\begin{cases} z=1 \\ z^2-4z+13=0 \end{cases}$

$\Delta'=4-13=-9=9i^2$ ومنه $z=2-3i$ أو $z=2+3i$

**الجزء الثاني**

$z_C=2-3i$ ; $z_B=2+3i$ ; $z_A=i$

1/ إيجاد $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالدوران $r\left(B\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$

لدينا $z_{A'}-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_B)$ يكافئ $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_A)+z_B$ يكافئ $z_{A'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-2-2i)+2+3i$

ومنه $z_{A'}=-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)(1+i)+2+3i=-\left(2\sqrt{2}i\right)+2+3i=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)i$

2/ لدينا $Z_A - Z_B$ =-2-2i لاحقة $\overrightarrow{AB}$ و $Z_A - Z_C$ =-2+4i لاحقة $\overrightarrow{AC}$

ومنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ أي A, B, C ليست في استقامية

العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه B ويحول النقطة C إلى A'

لدينا $\overrightarrow{BA'}=k\ \overrightarrow{BC}$ ومنه $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=|k|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ ومنه $|k|=\frac{BA'}{BC}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ أي $k=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ أو $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$

وبما أن $\overrightarrow{BA'}$ ; $\overrightarrow{BC}$ لهما نفس الاتجاه فان $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$ بالتالي $Z'=\frac{\sqrt{2}}{3}Z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)Z_B=\frac{\sqrt{2}}{3}Z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(2+3i)$

**التمرين الثالث**

$(U_n)$ متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=0$ ; $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$

1/ إثبات بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\leq 0$

نسمي P(n) هذه خاصية

ا) نتحقق من صحة P(0) لدينا $u_0=0$ و $-1<0\leq 0$ اي P(0) صحيحة

ب) نفرض أن P(n) صحيحة أي $-1<u_n\leq 0$ و نبرهن صحة P(n+1) أي $-1<u_{n+1}\leq 0$ ?

لدينا $-1<u_n\leq 0$ ومنه $2<u_n+3\leq 3$ ومنه $\frac{1}{3}<\frac{1}{u_n+3}\leq\frac{1}{2}$ ومنه $-2<\frac{-4}{u_n+3}\leq-\frac{4}{3}$

ومنه $-1<u_{n+1}\leq-\frac{1}{3}$ ومنه $-1<u_{n+1}\leq 0$

2/ دراسة رتابة $(U_n)$

لدينا $u_{n+1}-u_n=1-u_n-\frac{4}{u_n+3}=\frac{(1-u_n)(u_n+3)-4}{u_n+3}=-\frac{(u_n+1)^2}{u_n+3}\prec 0$ لأن $2<u_n+3\leq 3$ ، $(u_n+1)^2\geq 0$

إذن المتتالية $(u_n)$ **متناقصة** . و بما أن $(u_n)$ متناقصة ومحدودة فهي متقاربة .

3/ نعتبر $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

ا) إثبات أن $(v_n)$ **حسابية** لدينا
$$v_{n+1}-v_1=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{1-\frac{4}{u_n+3}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3-2}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}$$

ومنه $(v_n)$ **حسابية** أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها **الأول** $v_0=1$

ب) $v_n=1+\frac{n}{2}$; $u_n=\frac{1-v_n}{v_n}=\frac{-\frac{n}{2}}{1+\frac{n}{2}}$ ومنه $u_n=-\frac{n}{n+2}$

هـ) لدينا $\lim u_n=\lim\left(-\frac{n}{n+2}\right)=-1$ ; أي $(U_n)$ **مقاربة** نحو -1

4) نضع $S_n=\frac{1}{n^2}(v_0+v_1+............+v_n)$

لدينا $v_0+v_1+...+v_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\frac{n+1}{2}(1+1+\frac{n}{2})=\frac{1}{4}(n+1)(n+4)$ ومنه $S_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left[\frac{(n+1)(n+4)}{n^2}-1\right]=\frac{5n+4}{4n^2}$

لدينا من جهة $\frac{5n+4}{4n^2}-\frac{3}{n}=\frac{4-7n}{4n^2}\prec 0$ أي $S_n-\frac{1}{4}<\frac{3}{n}$

ومن جهة أخرى $\frac{5n+4}{4n^2}+\frac{3}{n}=\frac{17n+4}{4n^2}\succ 0$ أي $S_n-\frac{1}{4}>-\frac{3}{n}$ وبالتالي $\left|S_n-\frac{1}{4}\right|<\frac{3}{n}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{n}\right)=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{4}\right)=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}$

## التمرين الرابع

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1+e^{-x}$

1/ أ) $\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^{x}}\right)\right]=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1+e^{-x})=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{e^{-x}}{x}\right)\right]$ ; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب) $f'(x)=1-e^{-x}$

نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $\mathbb{R}$ $f(x)>0$

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | — | 0 | + |
| f(x) | +∞ ↘ | 2 | ↗ +∞ |

2/ نعتبر الدالة g **المعرفة على** $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln(x+1+e^{-x})$

أ) دراسة تغيرات الدالة g

$g'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$ ; $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

وبما ان $x+1+e^{-x}>0$ فان إشارة $g'(x)$ من إشارة $\left(1-e^{-x}\right)$

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | — | 0 | + |
| g(x) | +∞ ↘ | ln2 | ↗ +∞ |

ب) - إثبات أن $\lim_{x\to\infty}\left[g(x)+x\right]=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(x+1+e^{-x})+\ln(e^{x})\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(x+1)e^{x}+1\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(xe^{x}+e^{x}+1)\right]=\ln(1)=0$$

ومنه المنصف الثاني هو المستقيم مقارب مائل لـ$(c_g)$ من جهة $-\infty$

- إثبات أن $g(x)+x<0$ من اجل x<-1

لدينا $g(x)+x=\ln\left[(x+1)e^x+1\right]$

ومن اجل $x<-1$ فإن $x+1<0$ ومنه $(x+1)e^x<0$ ومنه $(x+1)e^x+1<1$ أي $\ln\left[(x+1)e^x+1\right]<0$

وبالتالي $g(x)+x<0$ أي من اجل x<-1 المنحنى يقع تحت المقارب المائل

- <u>حساب</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\ln x\right]$

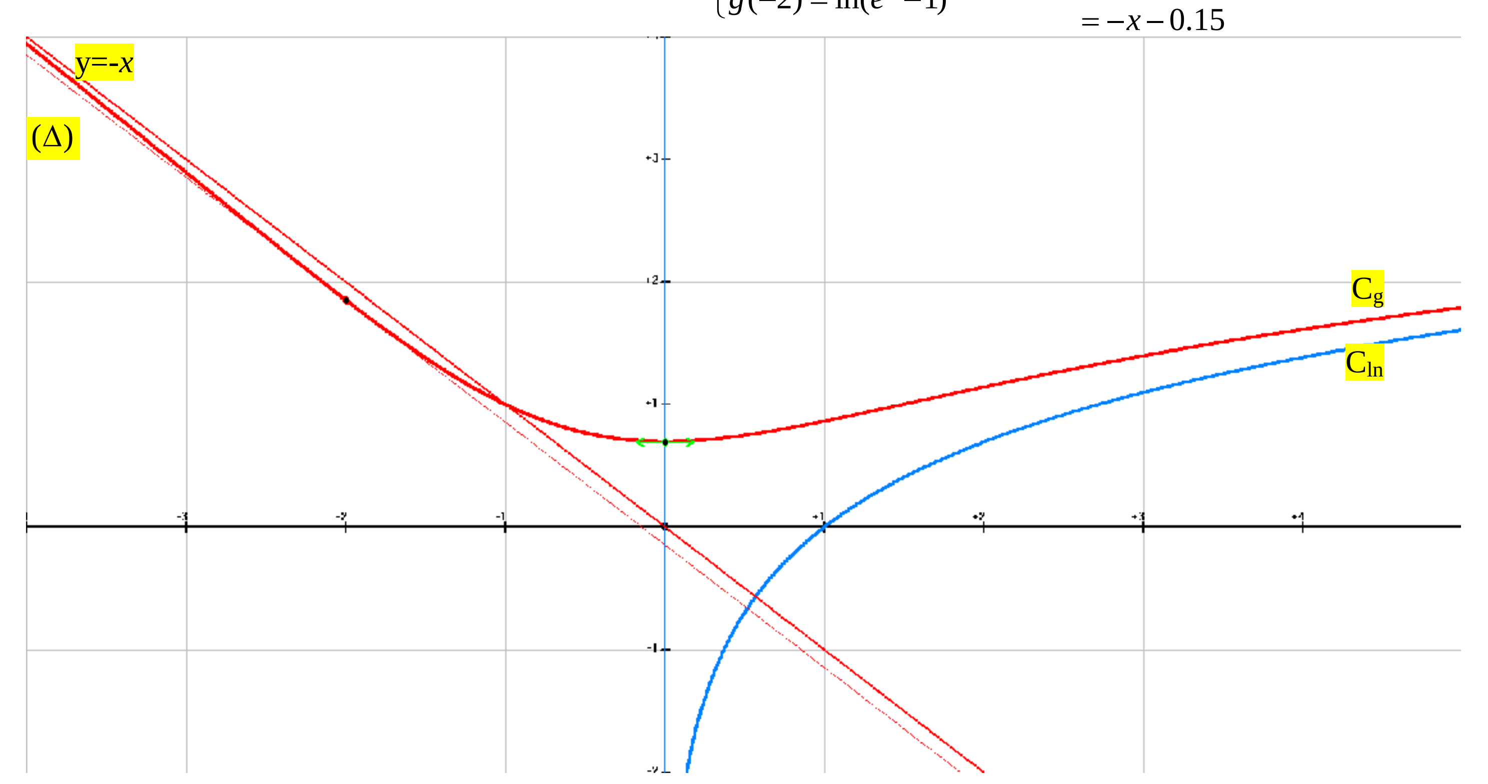
$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x+1+e^{-x}\right)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right]=\ln(1)=0$$

أي المنحنى $(C_{\ln})$ هو منحنى مقارب لـ $(C_f)$ من جهة $(+\infty)$

- كتابة معادلة $(\Delta)$ مماس لـ $(c_g)$ في النقط ذات الفاصلة 2-

$$y=g'(-2)(x+2)+g(-2)$$
$$=-1(x+2)+\ln(e^2-1)$$
$$=-x-0.15$$

مع $\begin{cases} g'(-2)=-1 \\ g(-2)=\ln(e^x-1) \end{cases}$




- المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x+1+e^{-x}(1-e^m)=0 \leftarrow (E)$

$(E)$ يكافئ $g(x)=-x+m$

حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(c_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$

من اجل $m\in\left]-\infty\ ,\ -0.15\right[$ المعادلة لا تقبل حل في $\mathbb{R}$

من اجل $m=-0.15$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

من اجل $m\in\left]-0.15\ ;\ 0\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين

من اجل $m\in\left[0,\ln 2\right[$ المعادلة تقبل حل سالب

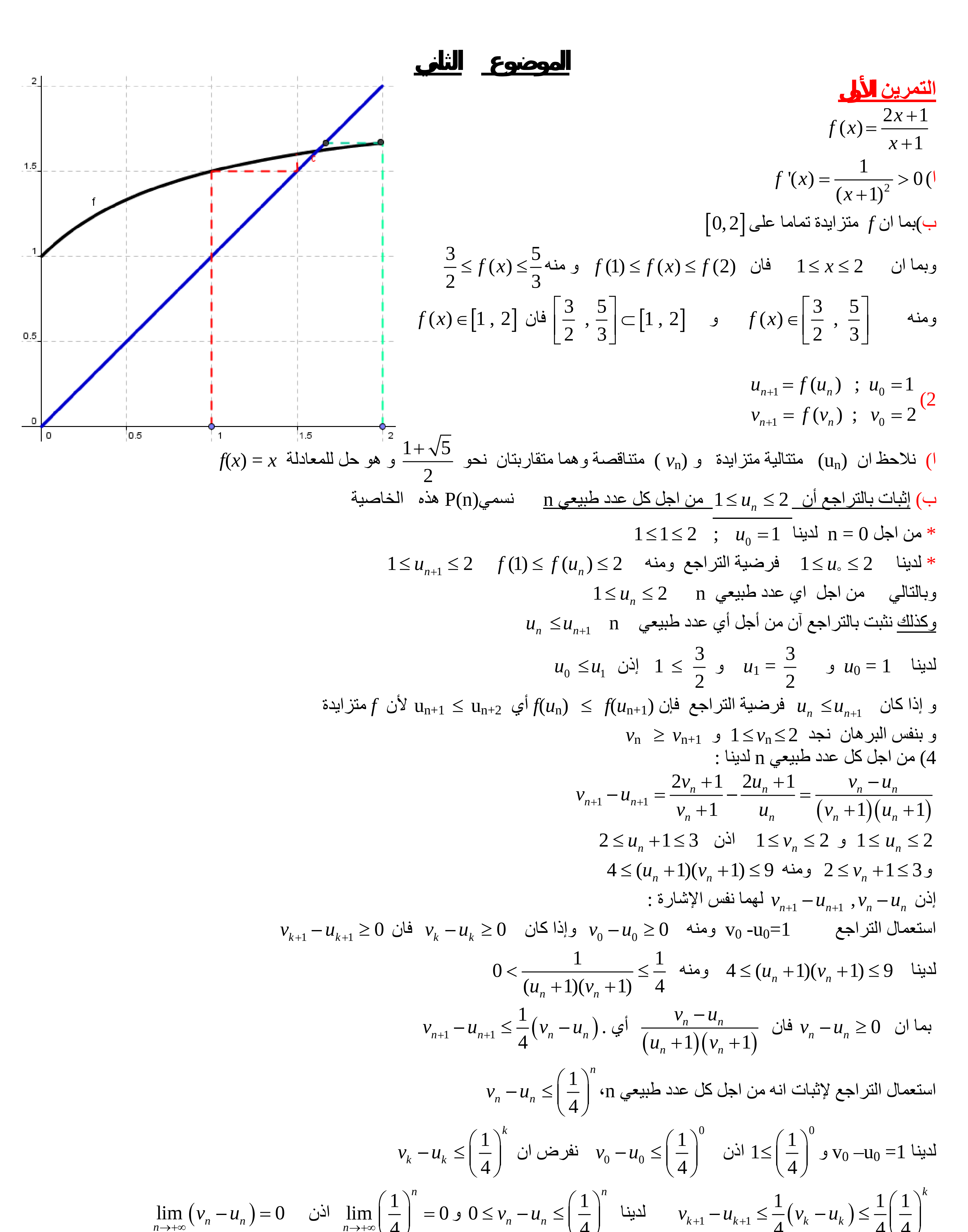
من اجل $m=\ln 2$ المعادلة تقبل حل معدوم

من اجل $m\in\left]\ln 2\ ;\ +\infty\right[$ المعادلة (E) تقبل حل موجب

3/ التاكد أن $f$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=x+2$

لدينا $f'(x)+f(x)=1-e^{-x}+x+1+e^{-x}=x+2$ ومنه f هي حل للمعادلة التفاضلية .

# الموضوع الثاني




## التمرين الأول

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0\ (1$$

ب)بما ان $f$ متزايدة تماما على $[0,2]$

وبما ان $1\le x\le 2$ فان $f(1)\le f(x)\le f(2)$ و منه $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$

ومنه $f(x)\in\left[\frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{3}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{3}\right]\subset[1\ ,\ 2]$ فان $f(x)\in[1\ ,\ 2]$

(2 $u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ u_0=1$

$v_{n+1}=f(v_n)\ ;\ v_0=2$

ا) نلاحظ ان $(u_n)$ متتالية متزايدة و $(v_n)$ متناقصة وهما متقاربتان نحو $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و هو حل للمعادلة $f(x)=x$

ب) إثبات بالتراجع أن $1\le u_n\le 2$ من اجل كل عدد طبيعي n نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

* من اجل $n=0$ لدينا $u_0=1\ ;\ 1\le 1\le 2$

* لدينا $1\le u_n\le 2$ فرضية التراجع ومنه $f(1)\le f(u_n)\le 2$ $1\le u_{n+1}\le 2$

وبالتالي من اجل اي عدد طبيعي n $1\le u_n\le 2$

وكذلك نثبت بالتراجع آن من أجل أي عدد طبيعي n $u_n\le u_{n+1}$

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ و $1\le\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$

و إذا كان $u_n\le u_{n+1}$ فرضية التراجع فإن $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$ لأن $f$ متزايدة

و بنفس البرهان نجد $1\le v_n\le 2$ و $v_n\ge v_{n+1}$

4) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $2\le u_n+1\le 3$

و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$

إذن $v_n-u_n$ , $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة :

استعمال التراجع $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فان $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه $0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$

بما ان $v_n-u_n\ge 0$ فان $\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ .

استعمال التراجع لإثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0-u_0=1$ و $1\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$ اذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$ نفرض ان $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ اذن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

وحسب السؤال 3) لدينا $u_n\le u_{n+1}$ و $v_n\ge v_{n+1}$ معناه $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة

اذن $(u_n)$ و$(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية $l$ .

$u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1\right)=0$ أي $l^2-l-1=0$ ومعناه $l=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

او $l=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ بينما $1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ اذن $l=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.

## التمرين الثاني

1) حل المعادلة $2z+\overline{z}=9i \leftarrow (1)$ نضع $z=x+iy$ $\overline{z}=x-iy$

(1)يكافئ $2x+2iy+x-iy=9i$ يكافئ 3 x + i y =9i ومنه x = 0 و y = 9 ومنه z = 9 i

طريقة2) بتعويض الحلول في المعادلة (1) نجد z = 9 i الذي يحقق

2) $|z+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ و $|i\,\overline{z}+1|-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ اي $|z+i|=|i\,\overline{z}+1|$

3) $\arg(z)=\theta$ $\arg\left(\dfrac{-1+i\sqrt3}{\overline{z}}\right)=\arg\left(-1+i\sqrt3\right)-\arg(\overline{z})$

$$=\frac{2\pi}{3}+\theta$$

4) $\sqrt3+i=\left(\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\left[2\ ,\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ ومنه $\left(\sqrt3+i\right)^n=\left[2^n\ ,\ \dfrac{n\pi}{6}\right]$

$\left(\sqrt3+i\right)^n$ تخيلي معناه $\cos\dfrac{n\pi}{6}=0$ معناه $k\in\mathbb{N}$ $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $n=6k+3/k\in\mathbb{N}$

5) $Z_A=i$ و $Z_B=-1$

$|z-i|=|z+1|$ يكافئ $x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+y^2$

يكافئ $x^2+y^2-2y+1=x^2+y^2+2x+1$ يكافئ $y=-x$ اي العمودي على (AB) والمار بـ O

طريقة2) لتكن M(z) حيث $|z-i|=|z+1|$ معناه M تبعد بنفس المسافة على النقطتين A وB أي Mهي محور القطعة $[AB]$

## التمرين الثالث

$A(1,1,0)$ ; $B(1,2,1)$ ; $C(3,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ ; $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$ لا يوجد عدد حقيقي k منه $\overrightarrow{AB}=k\times\overrightarrow{AC}$

منه A،B وC ليست في استقامة أي تعين مستو

بالتعويض عن إحداثيات كل من A،B وC في المعادلة $2x+y-z-3=0$ نجدها تحقق معادلة (ABC) هي $2x+y-z-3=0$

$(P): x+2y-y-4=0$ $\vec{n}(1,2,-1)$

$(P'): 2x+3y-2y-5=0$ $\vec{n'}\left(2,3,-2\right)$

نلاحظ آن $\vec{n}$ و$\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا ان (p) و (p') يتقاطعان وفق المستقيم d تمثيله الوسيطي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=t\end{cases}$

أ) لدينا -2+t+6-t-4=0 معناه 0t=0 و هي تقبل حل من اجل أي عدد حقيقي t ومنه (d) محتوى في (D)

ب) ولدينا 2(-2+t)+9-2t-5=0 معناه 0t=0 و هي تقبل حل من اجل أي عدد حقيقي t ومنه (d) محتوى في (p')

من (ا) و(ب) نقول ان (d) = $(p)\cap(p')$

$\begin{cases}x+2y-y-4=0\\2x+3y-2y-5=0\\2x+y-z-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\begin{cases}x=2+t\\y=3\\z=t\end{cases}\\2x+y-z-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=t\end{cases}\\2(-2+t)+3-t-3=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}t=4\\x=2\\y=3\\z=4\end{cases}$

## التمرين الرابع

$f$ دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad , \quad x\in ]0,+\infty[ \\ f(0)=1 \end{cases}$$

$(c_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

### الجزء الاول

(1 $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right]=1$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة x=0 (محور التراتيب ) ليس مستقيم مقارب لـ $(c_f)$

$$\lim_{x\to\infty} f \ln = -\infty$$

2) ا) دراسة قابلية اشتقاق $f$ عند $0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h(3-\ln h)\right)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}(3h-h\ln(h))\right]=0$$

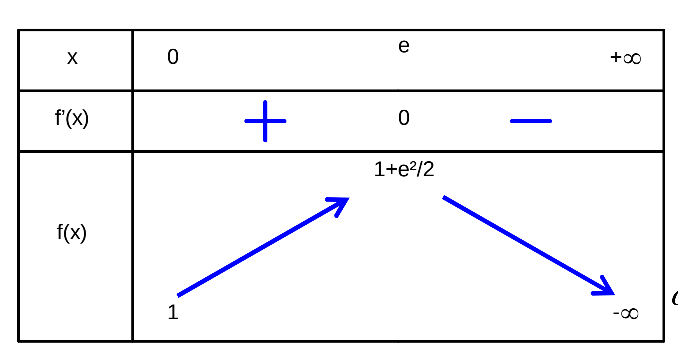
ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين والمنحنى $(c_f)$ يقبل نصف مماس يوازي (x x')

ب)بما أن الدالة $f$ معرفة على $[0,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين فهي قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا

$$f'(x)=3x-x^2\times\frac{1}{x}-2x\ln x=2x-2x\ln x==2x(1-\ln x)$$

إشارة $f'(x)$ في المجال $[0,+\infty[$ من إشارة $(1-\ln x)$

### جدول التغيرات



| x | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | — | |
| f(x) | 1 | ↗ | 1+e²/2 | ↘ | -∞ |

3) اثبات ان المعادلة $f(x)$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في مجال $[0,+\infty[$

بما ان الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$

وتأخذ قيمتها في المجال $\left]-\infty \ , \ 1+\frac{e^2}{2}\right]$ فهي إذن تقبل حل وحيد $\alpha$

في مجال $[0,+\infty[$ ولدينا $f(4,6)\approx 0,45$ و $f(4,7)\approx -5,07\times 10^{-2}$ اي $f(4,6)\times f(4,7)<0$ ومنه $4,6<\alpha<4,7$

4/ معادلة للمماس (D) لـ$(c_f)$ عند النقطة ذات فاصلة 1

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=2(x-1)+\frac{5}{2}$$
$$=2x+\frac{1}{2}$$

$$\left\| \begin{aligned} & f'(1)=2 \\ & f(1)=\frac{5}{2} \end{aligned} \right.$$

5/ $g$ دالة معرفة على مجال $]0,+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

ا) حساب g'(x) و g''(x)

$$g'(x)=f'(x)-2=2x(1-\ln(x))-2$$
$$g''(x)=f''(x)=-2\ln(x)$$

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g''(x) | | + | 0 | — | |
| g'(x) | -2 | ↗ | 0 | ↘ | -∞ |

من اجل , g'(x)<0 $\quad x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$

ومن اجل $x=1$ $\quad$ g'(x)=0

بــ/ دراسة تغيرات الدالة g

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | — | 0 | — | |
| g(x) | $\frac{1}{2}$ | ↘ | 0 | ↘ | -∞ |

وضعية$(c_f)$ بالنسبة الى (D)

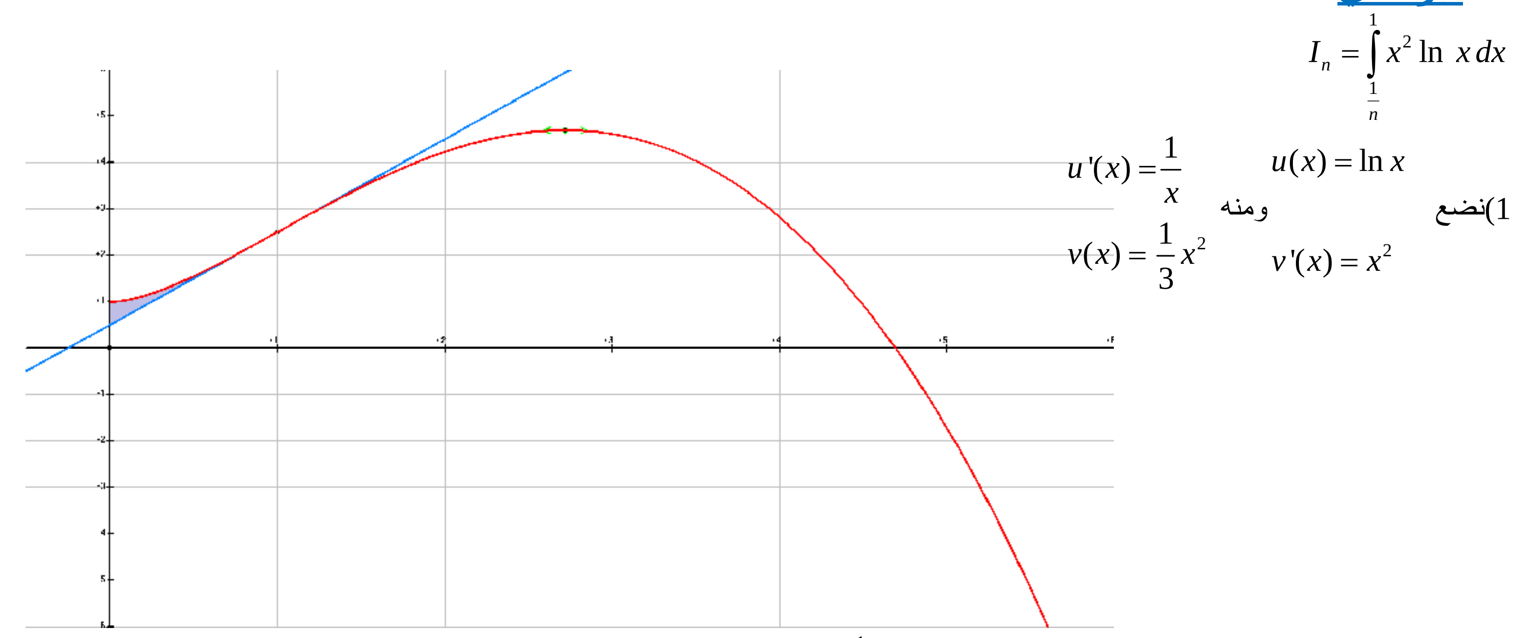
حساب $f(6)$ $\quad f(6)\approx -9,5$

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x)-2x-1/2 | | + | 0 | — | |

## الجزء الثاني

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\, dx$$

1)نضع $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=x^2$ ومنه $u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=\frac{1}{3}x^2$



$$I_n=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{3}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]=\left[\frac{1}{3}x^3(\ln x-\frac{1}{3}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{1}{9}+\frac{\ln n}{3n^3}+\frac{1}{9n^3}$$

(2
$$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[f(x)-(2x+\frac{1}{2})\right]dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}g(x)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)-x^2\ln x\right]dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx-I_n$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-I_n\ \ U.A$$

$$A(n)=-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{9}+\frac{\ln n}{9n^3}+\frac{1}{9n^3}\quad U.A\ =\frac{1}{9}-\frac{7}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{\ln n}{9n^3}\ U.A$$

$$\lim_{n\to+\infty}A(n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}-\frac{7}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{\ln n}{9n^3}\right)\approx\frac{1}{9}U.A$$

$$\approx\frac{4}{9}cm^2$$

# على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الأول

### تمرين 1: (8نقط)

I) $g$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-2\ln x - x e+1$

1. أدرس نهاية الدالة $g$ عند 0 و عند $+\infty$ ...... 1
2. أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ . ...... 0.5
3. * بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[0.5\,;1]$ ...... 0.5
   * أعط حصرا لـ $\alpha$ سعته 0.1 ...... 0.5
4. أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ ...... 0.5

II) $f$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x + xe}{x^2}$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهاية الدالة $f$ عند 0 و عند $+\infty$ ...... 1
2. أحسب $f'(x)$ و تحقق أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ . استنتج تغيرات الدالة $f$ ...... 1.5
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ...... 0.5
4. بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ . أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ...... 1.5
5. أنشئ المنحني $(C)$ ...... 0.5

### تمرين 2: (4.5 نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1. أحسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$ ...... 0.5
2. بين أنه يوجد كثير حدود $Q(z)$ حيث من أجل كل عدد مركب $z$ : $P(z)=(z^2+3)\,Q(z)$ ...... 0.5
3. حل المعادلة $P(z)=0$ ...... 1
4. أنشئ النقط $D,C,B,A$ التي لواحقها $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$ ...... 0.5

أ) عين لاحقة النقطة G منتصف $[DC]$ ...... 0.5

ب) بين أن النقط $D,C,B,A$ تنتمي إلى دائرة مركزها G يطلب تعيينها ...... 0.5

ج) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O . بين أن: $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ...... 0.5

ما طبيعة المثلث $BEC$ ؟ ...... 0.5






### تمرين 3: (4.5 نقط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ليكن المستوي $(P_1)$ الذي معادلته $-2x+y+z-6=0$ و ليكن المستوي $(P_2)$ الذي معادلته $x-2y+4z-9=0$

1) بين أن $(P_1)$ و $(P_2)$ متعامدان ...... 0.5

2) ليكن $(D)$ تقاطع $(P_1)$ و $(P_2)$ .

بين أن $(D)$ له تمثيل وسيطي من الشكل: $x=-7+2t$ ، $y=-8+3t$ ، $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ ...... 0.75

3) لتكن النقطة $A(-9,-4,-1)$ و $M$ نقطة من $(D)$ .

أ) بين أن $A$ لاتنتمي إلى $(P_1)$ و لاتنتمي إلى $(P_2)$ ...... 0.5

ب) عبر عن $AM^2$ بدلالة $t$ ...... 0.75

ج) لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t)=2t^2-2t+3$ . ادرس تغيرات الدالة $f$ ...... 0.75

ما هي النقطة $M$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أقل مايمكن ؟ نرمز لهذه النقطة بـ $I$ ...... 0.25

د) ليكن $(Q)$ المستوي العمودي على $(D)$ و المار من $A$ . أكتب معادلة لـ $(Q)$ ...... 0.5

هـ) بين أن النقطة $I$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(D)$ ...... 0.5

### تمرين 4: (3نقط)

$(U_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n-1 \end{cases}$

و المتتالية $(V_n)$ المعرفة بـ: $V_n=4U_n-8n+24$ و المجموع $S_n$ حيث: $S_n=u_0+u_1+.......+u_n$

**أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل .**

1) المتتالية $(V_n)$ هندسية متزايدة ...... 1

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$ ...... 0.5

3) المتتالية $(U_n)$ هي مجموع متتاليتين إحداهما حسابية و الأخرى هندسية . ...... 0.5

4) $S_n=n^2-5n+8-\dfrac{7}{2^n}$ ...... 0.5

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ ...... 0.5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية الشلف

ثانوية الشهيد محمد بوعيسي

الشعبة: العلوم التجريبية — المدة:03 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات — 2009//2008

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الثاني

### تمرين 1 : (7نقط)

I) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C)$.......................................................0.5
2. أحسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ .......................................................0.25
3. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة $f$ .......................................................0.75
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .......................................................0.5
5. عين إحداثي النقطة A نقطة تقاطع المنحني $(C)$ مع محور الفواصل.......................................................0.25
6. أدرس إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ .......................................................0.5

II) نرمز بـ " $f$ " للدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ .

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن : $f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$ .......................................................0.5
2. حل المعادلة $f''(x)=0$ .......................................................0.25
3. لتكن B النقطة من $(C)$ التي فاصلتها $\frac{1}{2}$ .أكتب معادلة للمماس T للمنحني $(C)$ عند النقطة B.......................................................0.5

III) . لتكن $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(x)-\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$

1. أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ .......................................................0.5
2. أدرس إشارة $g''(x)$ حسب قيم $x$ .......................................................0.5
3. استنتج اتجاه تغير الدالة $g'$ على $\mathbb{R}$ .......................................................0.25
4. استنتج إشارة $g'(x)$ حسب قيم $x$ ثم اتجاه تغير $g$ على $\mathbb{R}$ .......................................................0.5
5. استنتج وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة للمماس T .......................................................0.25
6. أرسم المماس T و المنحني $(C)$.......................................................1

### تمرين 2 : (3نقط)

نعتبر العدد المركب $z$ حيث : $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ . **أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل .**

1) $z^2=8\sqrt{3}+8i$ .......................................................1

2) $\left|z^2\right|=8\sqrt{3}$ .......................................................0.5

3) $\frac{z^2}{16}=e^{\frac{5i\pi}{6}}$ .......................................................0.5

4) $z^{2004}$ حقيقي . .......................................................0.5

5) $z^{2010}$ تخيلي صرف . .......................................................0.5



### تمرين 3 : ( 4 نقط)

الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

1. بين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا . أكتب معادلة له .......................................................1
2. نعتبرالمستويين ( P ) ، ( P’ ) المعرفين بالمعادلتين: $x-2y+2z-1=0$ ، $x-3y+2z+2=0$ على الترتيب .

أ) .بين أن المستويين ( P ) ، ( P’ ) متقاطعان.......................................................0.5

بـ) بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين ( P ) ، ( P’ ) .......................................................0.5

جـ) بين أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.......................................................0.5

د) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ .......................................................0.5

3. لتكن النقطة M من المستقيم $(\Delta)$ المعرف بـ : $x=1+2k$ ، $y=3$ ، $z=3-k$ $(k\in\mathbb{R})$.

أ) عين العدد الحقيقي $k$ حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين . .......................................................0.5

بـ) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم $(\Delta)$.......................................................0.5

### تمرين 4: (6 نقط)

$f$ دالة معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$ ،

$(C)$ تمثيلهاالبياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) أدرس تغيرات الدالة $f$ ثم أنشئ منحناها $(C)$. أعط حصرا لـ $f(x)$ في المجال $[0\,;\,2]$ .......................................................1.5

II) $(u_n)$ هي المتتالية المعرفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+2}$ .

1) أحسب $u_1$ ثم أنشئ بيانيا الحدين $u_2$ , $u_3$ .......................................................0.75

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ , $0\le u_n\le 2$ .......................................................0.75

3) برهن أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما . هل $(u_n)$ متقاربة ؟.......................................................0.75

4) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة بـ : $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$

5) أثبت أن $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب أساسها r . هل $(V_n)$ متقاربة ؟ .......................................................0.75

6) أكتب $V_n$ بدلالة n ثم استنتج $U_n$ بدلالة n.......................................................0.75

7) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+......+v_n$ .......................................................0.5

III) نعتبر المتتالية $(w_n)$ المعرفة بـ : $w_n=\ln(-v_n)$

ماطبيعة المتتالية $(w_n)$ وماهو اتجاه تغيرها ؟.......................................................0.75

انتهى



بالتوفيق

# تصحيح الموضوع الأول

## تمرين 1 : (8نقط)

I) $g$ دالة معرفةعلى $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-2\ln x-x\,e+1$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ ........................................................................................................ 1

2. $g'(x)=-\dfrac{2}{x}-e<0$ و منه الدالة $g$ متناقصة تماما ............................................................................ 0.5

3. الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تماما على $[0.5\,;1]$ ، $g(0,5)=1,02$ ، $g(1)=-1,7$ ومنه $g(0,5)\times g(1)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[0.5\,;1]$ ................................ 0.5

حصرا لـ $\alpha$ سعته $0.1$ هو $0,6<\alpha<0,7$ ........................................................................................ 0.5

0.5........................................................................................................

| $x$ | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | + | 0 | − |

II) $f$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x+xe}{x^2}$

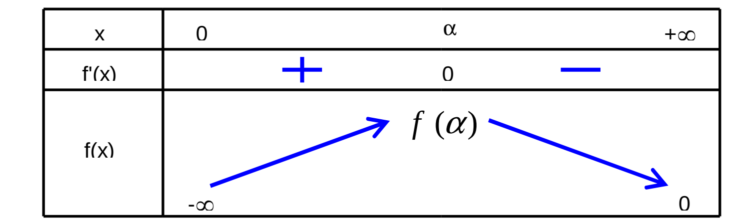
1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ............................................................................................................. 1

2. $f'(x)=\dfrac{-2\ln x-x-1}{x^3}$ و منه : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ .

في المجال $]0\,;\alpha]$ الدالة $f$ متزايدة تماما . . ............................................................................................ 1.5

في المجال $[\alpha;+\infty[$ الدالة $f$ متناقصة تماما .

3. جدول تغيرات الدالة $f$ ..................... 0.5



| x | 0 | | α | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | -∞ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | 0 |

4 . $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha+\alpha e}{\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ لأن $g(\alpha)=0$

. حصرا لـ $f(\alpha)$ : $2,67<f(\alpha)<4,01$ ........ 1.5

5. أنشئ المنحنى $(C)$ ................................................................................................................ 0.5

## تمرين 2: (4.5 نقط)

في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1. $P(i\sqrt{3})=0$ و $P(-i\sqrt{3})=0$ ........................................................................................... 0.5

2. $P(z)=(z^2+3)\,(z^2-6z+21)$ .......................................................................................................... 0.5

3. حلول المعادلة $z^2+3=0$ هي $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$ ........................................................................................ 0,5

حلول المعادلة $z^2-6z+21=0$ هما $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$ لأن $\Delta'=-12=(2\sqrt{3}i)^2$ ..................................0,5

4. إنشاء النقط $D,C,B,A$ التي لواحقها $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$ ...........................0.5

أ) $z_G=\dfrac{z_c+z_D}{2}=3$ .........................................................................................................................................0.5

ب) بما أن $AG=BG=CG=DG=2\sqrt{3}$ فإن النقط $D,C,B,A$ تنتمي إلى دائرة مركزها G ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ ...........0.5

ج) $z_E=-z_D$. ومنه $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\left[1;\dfrac{\pi}{3}\right]=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ......................................................................................0.5

ومنه المثلث $BEC$ متقايس الأضلاع.........................................................................................................0.5

## تمرين3: (4.5 نقط)

1) $\vec{n}_1(-2;1;1)$ شعاع ناظمي لـ $(P_1)$ و $\vec{n}_2(1;-2;4)$ شعاع ناظمي لـ $(P_2)$ .

و بما أن $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$ فإن $(P_1)$ و $(P_2)$ متعامدان...........................................................................0.5

2). $(D)$ تقاطع $(P_1)$ و $(P_2)$ . لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من $(D)$ ، فهي تحقق الجملة $\begin{cases}-2x+y+z-6=0\\x-2y+4z-9=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}y=2x-z+6\\x=2y-4z+9\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=3z-8\\x=2y-4z+9\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=3z-8\\x=2z-7\end{cases}$ و بوضع $z=t$

يكون $(D)$ له تمثيل وسيطي من الشكل : $x=-7+2t$ ، $y=-8+3t$ ، $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ ....................................0.75

3) أ) $A\notin(P_1)$ و $A\notin(P_2)$ لأن الإحداثيات لا تحقق المعادلة..............................................................0.5

ب) $AM^2=(x+9)^2+(y+4)^2+(y+1)^2$ ومنه $AM^2=14t^2-14t+21=7f(t)$ ....................................0.75

ج) تغيرات الدالة $f$ ............................0.75

في المجال $]-\infty;0,5]$ الدالة $f$ متناقصة تماما و في المجال $[0,5;+\infty[$ الدالة $f$ متزايدة تماما و $f(0,5)=2,5$

تكون $AM$ أقل مايمكن عندما $t=0,5$ تكون عندها $I(-6;-\frac{13}{2};\frac{1}{2})$ ............................................................0.25

د) $(Q)$ المستوي العمودي على $(D)$ ومنه $\vec{n}(2;3;1)$ شعاع ناظمي له و تكون معادلة $(Q)$ من الشكل :

$2x+3y+z+d=0$ و بما أن $A\in(Q)$ فإن $d=31$ ........................................................................................0.5

هـ) $\overrightarrow{IA}(-3;\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ ومنه $\overrightarrow{IA}.\vec{n}=0$ ومنه $\overrightarrow{IA}\perp\vec{n}$

و بما أن النقطة $I\in(D)$ فإن $I$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(D)$ ...........................................................0.5

## تمرين4: (3نقط)

1) خطأ لأن $V_0=28$ و $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$ المتتالية $(V_n)$ هندسية متناقصة. .........................................................1

2) صحيح لأن $V_n=28\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=\frac{1}{4}V_n+2n-6=7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$ ...............................................0.5

3) صحيح لأن $(U_n)$ هي مجموع متتاليتين حسابية $a_n=2n-6$ و هندسية $b_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ...................................0.5

4) صحيح لأن $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=0}^{n}b_k=n^2-5n+8-\frac{7}{2^n}$ ...........................................................................0.5

5) صحيح لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{2^n}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}(n^2-5n+8-\frac{7}{2^n})=+\infty$ ...............................................0.5

# الموضوع الثاني

تمرين1 : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$

1. حساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\left(-2x\,e^{-2x}\right)+e^{-2x}=0$ ، المنحني $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $-\infty$

2. نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-2x}=-\infty$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

3. حساب $f'(x)$ : $f'(x)=-4x\,e^{-2x}$

في المجال $]-\infty;0]$ الدالة $f$ متزايدة تماما .

في المجال $[0;+\infty[$ الدالة $f$ متناقصة تماما .

4. جدول التغيرات :

| x | -∞ | $-\frac{1}{2}$ | +∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − |
| f(x) | -∞ ↗ | 0 | ↘ 0 |

5. تعيين إحداثيي النقطة A نقطة تقاطع المنحني $(C)$ مع محور الفواصل: $f(x)=0$ تكافئ $x=-\frac{1}{2}$ ، $A\left(\frac{-1}{2};0\right)$

6. دراسة إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II) 1. لنبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن :

$f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$ ، من $f''=(f')'$ نجد المطلوب

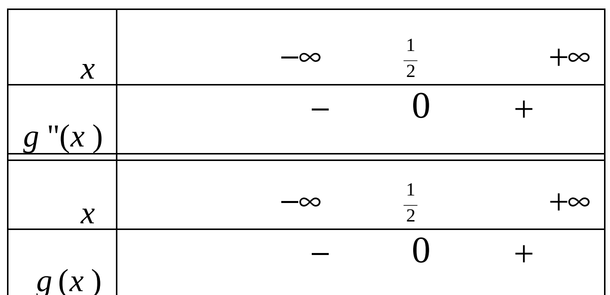
2. حل المعادلة $f''(x)=0$ : $4(2x-1)e^{-2x}=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}$

3. معادلة للمماس T للمنحني $(C)$ عند النقطة B التي فاصلتها $\frac{1}{2}$ : $y=-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}$

III) . لتكن $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(x)-\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$

1. حساب $g'(x)$ و $g''(x)$ : $g'(x)=f'(x)+\frac{2}{e}=-4x\,e^{-2x}+\frac{2}{e}$ ، $g''(x)=f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$

2. دراسة إشارة $g''(x)$ حسب قيم $x$



| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة $g'$ على $\mathbb{R}$ :

في المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$ الدالة $f$ متناقصة تماما .

في المجال $[\frac{1}{2};+\infty[$ الدالة $f$ متزايدة تماما

4. استنتاج إشارة $g'(x)$ : من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$g'(x)\geq g'(\frac{1}{2})$

أي $g'(x)\geq-\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e}\geq 0$ (قيمة حدية صغرى)

اتجاه تغير $g$ على $\mathbb{R}$:

$g'(x)\geq 0$ إذن الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

5. وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة للمماس T :

في المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$ ، $(C)$ يقع تحت T

في المجال $[\frac{1}{2};+\infty[$ ، $(C)$ يقع فوق T

6. رسم المماس T و المنحني $(C)$:



**تمرين 2:** $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ .

**1)** خاطئ ، $z^2=-8\sqrt{3}+8i$

**2)** خاطئ ، $\left|z^2\right|=16$

**3)** صحيح ، $\arg\left(z^2\right)=\frac{5\pi}{6}$ و $\left|z^2\right|=16$ ومنه $z^2=16e^{\frac{5i\pi}{6}}$ فيكون $\frac{z^2}{16}=e^{\frac{5i\pi}{6}}$

**4)** صحيح ، $z^{2004}=\left(z^2\right)^{1002}=\left(16e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{1002}=e^{\frac{5i\pi1002}{6}}=16^{1002}e^{835\pi}=16^{1002}(-1)$

**5)** صحيح ، $z^{2010}=\left(z^2\right)^{1005}=\left(16e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{1005}=16^{1002}e^{\frac{1575i\pi}{2}}=16^{1002}e^{\frac{-i\pi}{2}}=16^{1002}(-i)$ .

**تمرين 3:** $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

1. لنبين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا :الشعاعان $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$ غير متوازيين إذن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ليست على استقامية فهي تعين مستويا وحيدا ..

كتابة معادلة للمستوي $(ABC)$ : ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ إذن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ ومنه $\begin{cases}2a-c=0\\ b+c=0\end{cases}$

من أجل $a=1$ مثلا نجد : $b=-2$ و $c=2$ ، $\vec{n}(1,-2,2)$ فتكون معادلة لـــ $(ABC)$ : $x-2y+2z+d=0$

A تنتمي إلى $(ABC)$ ومنه $1-4+4+d=0$ ومنه $d=-1$ فنتحصل على معادلة لـــ $(ABC)$ : $x-2y+2z-1=0$

**2.أ)** لنبين أن المستويين ( P ) ، ( P’ ) متقاطعان: $\vec{n}(1,-2,2)$ هو ناظمي لــ ( P ) و $\vec{n}'(1,-3,2)$ هو ناظمي لــ ( P’ ) وهما غير متوازيين إذن ( P ) ، ( P’ ) متقاطعان

**ب)** لنبين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين ( P ) ، ( P’ )

C تنتمي إلى( P ) لأن ( P ) هو $(ABC)$ و C تنتمي إلى( P’ ) لأن $1-9+6+2=0$ إذن C تنتمي إلى تقاطعهما .

**جـ)** لنبين أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$: $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}'\cdot\vec{u}=0$ إذن $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}$ وعلى $\vec{n}'$ فهو يوازي $(\Delta)$

**د)** تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ : $x=1+2t$ ، $y=3$ ، $z=3-t$ $(t\in\mathbb{R})$ .

3. لتكن النقطة M من المستقيم $(\Delta)$ المعرف بـ : $x=1+2k$ ، $y=3$ ، $z=3-k$ $(k\in\mathbb{R})$ .

**أ)** تعيين العدد الحقيقي $k$ جتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين : $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2,z-2)$ و $\vec{u}(2;0;-1)$

متعامدين إذا وفقط إذا كان $2(x-1)-(z-2)=0$ أي $2(2k-1-1)-(-k+3-2)=0$ فنجد $k=\frac{1}{5}$ .

**ب)** استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم $(\Delta)$: مماسبق نستنتج أن النقطة M هي المسقط العمودي للنقطة A على $(\Delta)$ فتكون المسافة المطلوبة هي : $AM=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+\left(3-2\right)^2+\left(\frac{7}{5}-1\right)^2}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$

**تمرين 4:** $f$ دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$

I) دراسة تغيرات الدالة $f$ : $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}$ ، $f'(x)\rangle 0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0\ ;+\infty[$

*حصر $f(x)$ في المجال $[0\ ;\ 2]$ : $f$ متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ 2]$ إذن $f(0)\langle f(x)\langle f(2)$ أي $1\langle f(x)\langle 2$

المنحنى $(C)$

II) $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$ .

1) تعيين الحدود : $u_1=1$ ، $u_2=\dfrac{5}{3}$ ، $u_3=\dfrac{21}{11}$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0\le u_n\le 2$

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$ : $0\le u_0\le 2$ صحيحة لأن $u_0=0$

المرحلة الثانية: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n$ أي $0\le u_n\le 2$

ولنبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $0\le u_{n+1}\le 2$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ ومماسبق $u_n\in[0\ ;\ 2]$ يستلزم $u_{n+1}\in[1\ ;\ 2]$ أي $u_{n+1}\in[0\ ;\ 2]$ ( الحصر)

3) لنبرهن أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما . $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-u_n=\dfrac{-u_n{}^2+u_n+2}{u_n+2}=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$

لدينا $0\le u_n\le 2$ ومنه $u_{n+1}-u_n\ge 0$

هل $(u_n)$ متقاربة : المتتالية $(u_n)$ متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة ..

4) إثبات أن $(V_n)$ متتالية هندسية: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-2}=4v_n$ أساسها 4 ، $(V_n)$ ليست متقاربة.

5) كتابة $V_n$ و $u_n$ بدلالة $n$: $V_n=V_0\ r^n=\dfrac{-1}{2}\times 4^n$ ، $u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}=\dfrac{2\left(\dfrac{-1}{2}\times 4^n\right)+1}{\left(\dfrac{-1}{2}\times 4^n\right)-1}=2\dfrac{1-4^n}{2+4^n}$

6) حساب المجموع : $S_n=v_0\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1-4^n}{1-4}=\dfrac{1}{6}\left(1-4^n\right)$

III) $w_n=\ln\left(\dfrac{1}{2}4^n\right)=-\ln 2+n\ln 4$ ، $(w_n)$ حسابية متزايدة أساسها $\ln 4$ ( أساسها موجب )

**انتهى**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الشهيد محمد بوعيسي - الشلف - يوم : 2008/05/18

# بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

شعبة : 3 علوم و تكنولوجيا المدة: 3 ساعات و نصف

**إختر أحد الموضوعين بتمهل و روية مع مراعاة الدقة ووضوح الخط**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول : ( 04 نقط )

- أحسب العدد $(1 + 4i)^2$ حيث $i^2 = -1$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث : $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$
( ليكن $z_1$ ؛ $z_2$ حلي هذه المعادلة حيث $|z_1| < |z_2|$ ) أحسب العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$
2. لتكن A ؛ B و C صور الأعداد $z_1$ ؛ $z_2$ ، $-2 + 2i$ على الترتيب في مستو منسوب الى معلم متعامد وَ متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، ما طبيعة المثلث ABC
3. عين النقطة H مرجح النقط A ؛ B و C المرفقة بالمعاملات 2 ، 2 - ، 3 على الترتيب .
4. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 16$

### التمرين الثاني : ( 05 نقط )

$(U_n)$ متتالية عددية معرفة بـــ $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، يكون $-3 < U_n < 1$
2) بين أن $(U_n)$ متزايدة تماما .
3) $(V_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$
   - بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية .
   - عبر عن $V_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $U_n$ بدلالة $n$ أيضا .
   - أدرس تقارب $(U_n)$.

### التمرين الثالث : ( 03 نقط )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ .

نسمي (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية $x + 2y - 3z - 1 = 0$

و (D) المستقيم ذو المعادلة الوسيطية $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ في كل سطر من هذا الجدول يوجد تأكيد وحيد صحيح أعط هذا التأكيد( رقم السطر و الحرف المناسبين) التبرير غير مطلوب

| رقم السطر | التأكيد أ | التأكيد ب | التأكيد جـ |
|---|---|---|---|
| .1 | النقطة M ذات الإحداثيات ( 2 ; 3 ; 1- )تنتمي إلى (D) | النقطة N ذات الإحداثيات ( 1- ; 1- ; 2 )تنتمي إلى (D) | النقطة R ذات الإحداثيات ( 4- ; 1 ; 3 )تنتمي إلى (D) |
| .2 | الشعاع $\vec{u}$ ذو الإحداثيات ( 3- 2 ; 1) شعاع توجيه لـ(D) | الشعاع $\vec{v}$ ذو الإحداثيات (1 ; 1 ; 2-) شعاع توجيه لـ (D) | الشعاع $\vec{w}$ ذو الإحداثيات ( 4- 1 ; 3) شعاع توجيه لـ (D) |
| .3 | (D) محتو في (P) | (D) مواز لـ (P) | (D) يقطع (P) |
| .4 | النقطة G ذات الإحداثيات ( 2- ; 3 ; 1)تنتمي إلى (P) | النقطة H ذات الإحداثيات ( 2 ; 3 ; 1 )تنتمي إلى (P) | النقطة K ذات الإحداثيات ( 1- ; 3 ; 1 )تنتمي إلى (P) |
| .5 | المستوي $(Q_1)$ذو المعادلة الديكارتية $x+2y-3z+1=0$ عمودي على (P) | المستوي $(Q_2)$ ذو المعادلة الديكارتية $4x-5y-2z+3=0$ عمودي على (P) | المستوي $(Q_3)$ ذو المعادلة الديكارتية $-3x+2y-z-1=0$ عمودي على (P) |
| .6 | المسافة بين النقطة T ذات الإحداثيات ( 2 ; 3- ; 1- ) والمستوي (P) هي $\sqrt{14}$ | المسافة بين النقطة T ذات الإحداثيات ( 2 ; 3- ; 1- ) والمستوي (P) هي 14 | المسافة بين النقطة T ذات الإحداثيات ( 2 ; 3- ; 1- ) والمستوي (P) هي $2\sqrt{3}$ |

### التمرين الرابع : ( 08 نقط )

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

I ) $h$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ حيث : $h(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$

حيث $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ أعداد حقيقية . عين قيمة كل من الأعداد $\alpha$ ، $\beta$ ، $\lambda$ علما أن المنحني الممثل للدالة $h$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 ، و يشمـــل النقطة $A(2 ; -e^2)$ و يقبل في النقطة A مماسا يوازي محور الفواصل .

II ) $f$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ حيث : $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$ ( C ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1 . عين مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم أثبت أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2 . أدرس تغيرات الدالة $f$ و المستقيمات المقاربة لـــ ( C ) .

3 . أكتب معادلة لمماس ( Δ ) للمنحني ( C ) عند نقطته التي فاصلتها 0 . أرسم ( Δ ) و ( C ) .

4. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$ . استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

5 . $\lambda$ عدد حقيقي أصغر من 1 . أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C ) و المستقيمات التي معادلاتها $x = \lambda$ , $x = 1$ و $y = 0$ . أحسب نهاية $A(\lambda)$ عندما يؤول $\lambda$ إلى $-\infty$ .

إنتهى

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الشهيد محمد بوعايسي - الشلف - يوم : 2008/05/18

# بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

شعبة : 3 علوم و تكنولوجيا | المدة: 3 ساعات و نصف

إختر أحد الموضوعين بتمهل و روية مع مراعاة الدقة ووضوح الخط

## الموضوع الثاني




### التمرين الأول : ( 04 نقط )

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

1- أثبت بالتراجع أن : $u_n \succ 1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$

2- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)$ و إستنتج أنها متقاربة .

3- لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $v_n = ln(u_n)$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

د) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + .....v_{n-1}$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times .....\times u_{n-1}$ أحسب $S_n$ بدلالة $n$ ثم إستنتج $p_n$ بدلالة $n$

### التمرين الثاني : ( 04 نقط )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$

نعتبر النقط : $A(-2,0,0)$ و $B(3,2,-4)$ و $C(1,2,-2)$

1- بين أن (S) سطح كرة مركزها $\Omega(2,0,-1)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) بين أن النقط A , B و C ليست في إستقامية .

ب) أكتب معادلة للمستوي (p) المحدد بالنقط A , B و C .

ج) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار بالنقطة Ω و العمودي على المستوي (p)

3 - أدرس الوضعية النسبية للمستوي (p) و سطح الكرة (S).

### التمرين الثالث : ( 04 نقط )

I) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \quad (E)$

1- أثبت أن العدد 2 حل للمعادلة (E) ثم حدد الأعداد الحقيقية : $a$ ، b و c حيث :

$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(az^2 + bz + c)$

2- أكتب الحلول الثلاثة للمعادلة (E) على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي .

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$

1- علم النقط A ، B ، D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -2 - 2i$ ، $z_B = 2$ و $z_D = -2 + 2i$

2- أحسب $z_C$ لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع ثم علم النقطة C

3- لتكن النقطة E صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و لتكن النقطة F صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) أحسب $z_E$ و $z_F$ لاحقتي النقطتين E و F على الترتيب .

ب)علم النقطتين E و F

4- أ) تحقق من أن : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$

ب) إستنتج طبيعة المثلث AEF.

### التمرين الرابع : ( 08 نقط )

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

$f$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ معرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{4x^3}{(2x-1)^2}$ ، $(C)$ تمثيلها البياني.

1 . أدرس تغيرات الدالة $f$ .

2 . أحسب العددان $a$ ، $b$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $D_f$ : $f(x) = x + 1 + \dfrac{ax+b}{(2x-1)^2}$ .

3 . بين أن للمنحني $(C)$مستقيمين مقاربين أحدهما مائل $(\Delta)$.

أدرس وضعية المنحني $(C)$بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

4 . أكتب معادلة المماس $(T)$للمنحني $(C)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

5 . أرسم المماس $(T)$ ثم أنشئ المنحني $(C)$.

6 . ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي$m$عدد و إشارة حلول المعادلة : $-4x^3 + 4mx^2 - 4mx + m = 0$

7 . $g$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$حيث: $g(x) = \dfrac{4x^3}{(2|x|-1)^2}$ .

بين أن الدالة $g$فردية ثم أرسم المنحني $(\Gamma)$الممثل للدالة $g$ مستعينا بالمنحني $(C)$

إنتهى

**التمرين الأول :** - حساب $(1+4i)^2$ : لدينا $(1+4i)^2=-15+8i$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(3+2i)z+5+i=0$ لدينا $\Delta=-15+8i=(1+4i)^2$

إذن إما $z=1-i$ أو $z=2+3i$ و بما أن $|z_1|<|z_2|$ فإن $z_1=1-i$ و $z_2=2+3i$ .

. حساب العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt2}\right)^{2008}$ ، لدينا $z_1=\left[\sqrt2\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]$ إذن $\left(\frac{z_1}{\sqrt2}\right)^{2008}=\left(\frac{\left[\sqrt2\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt2\ ,\ 0\right]}\right)^{2008}=\left[1\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]^{2008}$

$=\left[1\ ,\ -\frac{2008\,\pi}{4}\right]=\left[1\ ,\ -504\,\pi\right]=1$

2. A ، B و C صور الأعداد $z_1$ ، $z_2$ و $-2+2i$ على الترتيب لدينا :

$|z_1-z_2|=\sqrt{17}$ ، $|z_1-(-2+2i)|=\sqrt{18}$ ، $|z_2-(-2+2i)|=\sqrt{17}$ أي المثلث ABC متساوي الساقين.

3. تعيين H مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 2 , -2 , 3 على الترتيب

لدينا $z_H=\frac{2z_1-2z_2+3(-2+2i)}{3}=-\frac{8}{3}-\frac{2}{3}i$ أي $H(-\frac{8}{3}\ ,\ -\frac{2}{3})$

4. تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2MA^2-2MB^2+3MC^2=16$ ....(1)

المساواة (1) تكافئ $2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})^2-2(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MB})^2+3(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})^2=16$ يعني $MH^2=\frac{110}{9}$ أي $MH=\frac{\sqrt{110}}{3}$

إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها H و نصف قطرها $\frac{\sqrt{110}}{3}$.

**التمرين الثاني :** $(U_n)$ متتالية عددية معرفة بـ $U_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_{n+1}=\frac{4U_n+3}{U_n+6}$

1. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، يكون $-3<U_n<1$

نسمي p(n) هذه الخاصية . من أجل n = 0 لدينا $U_0=-1$ و $-3<-1<1$ إذن p(0) صحيحة

نفرض أن p(n) صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أي $-3<U_n<1$

و نبرهن صحة p(n+1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أي $-3<U_{n+1}<1$ و لهذا لدينا $U_{n+1}=4-\frac{21}{U_n+6}$

لدينا من (فرضية التراجع) $-3<U_n<1$ و منه $3<U_n+6<7$ ومنه $-7<-\frac{21}{U_n+6}<-3$ إذن $-3<4-\frac{21}{U_n+6}<1$

و بالتالي $-3<U_n<1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$

2. إثبات أن $(U_n)$ متزايدة تماما : بعد الحساب نجد $U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n+3)}{U_n+6}$

من نتيجة السؤال 1) لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ $U_n-1<0$ ، $U_n+3>0$ و $U_n+6>0$

إذن $U_{n+1}-U_n>0$ وبالتالي $(U_n)$ متزايدة تماما .

3. إثبات أن $(V_n)$ متتالية هندسية: لدينا $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3}=\frac{3}{7}V_n$ أي $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{7}$

و حدها الأول $V_0=-1$ إذن $V_n=-\left(\frac{3}{7}\right)^n$ و منه نجد أن $U_n=\frac{3V_n+1}{1-V_n}=\frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}$

تقارب المتتالية $(U_n)$ لدينا: $\lim U_n=\lim\frac{1-3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}=1$ أي $(U_n)$ متقاربة نحو 1 .

**التمرين الثالث :** التأكيدات الصحيحة هي :

1/ جـ ؛ 2/ ب ؛ 3/ جـ ؛ 4/ ب ؛ 5/ ب ؛ 6/ أ .

**التمرين الرابع :** I ) $h$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ حيث : $h(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^x$

تعيين قيمة كل من الأعداد α ، β ، λ علما أن المنحني الممثل للدالة $h$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 ، و يشمل النقطة $A(2\ ;\ -e^2)$ و يقبل في النقطة A مماسا يوازي محور الفواصل .

يعني $h(1)=0$ ؛ $h(2)=-e^2$ و $h'(2)=0$ و $h'(x)=(\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta+\gamma)e^x$

و بعد حل الجملة نجد $\alpha=2$ ؛ $\beta=-7$ و $\gamma=5$

II ) $f$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ حيث : $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$

1. $D_f=\mathbb{R}$ ؛ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة $f$ : لدينا $f'(x)=(2x^2-3x-2)e^x$

$f'(x)=0$ معناه $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=2$

جدول التغيرات :

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | 0 | ↗ | $\frac{9}{\sqrt{e}}$ | ↘ | $-e^2$ | ↗ | $+\infty$ |

المستقيمات المقاربة

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ يعني حامل محور الفواصل مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2x^2-7x+5)e^x=+\infty$ إذن (C) يقبل فرع قطع مكافئ بإتجاه (yy') .

3. معادلة لمماس (Δ) لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=-2x+5$

4. إثبات أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

لدينا $f''(x)=(2x^2+x-5)e^x$

$4e^x+2f'(x)-f''(x)=4e^x+2(2x^2-3x-2)e^x-(2x^2+x-5)e^x$

$=(4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x=(2x^2-7x+5)e^x=f(x)$

إستنتاج الدالة الأصلية للدالة $f$ :

$\int f(x)dx=\int(4e^x+2f'(x)-f''(x))dx \quad 4e^x+2f(x)-f'(x) \quad (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x=(2x^2-11x+16)e^x$

5. حساب مساحة الحيز المستوي A(λ) المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=\lambda$ ، $x=1$ و $y=0$

$A(\lambda)=\left[(2x^2-11x+16)e^x\right]_\lambda^1$

$=7e-(2\lambda^2-11\lambda+16)e^\lambda \quad U.A$

$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=7e \quad U.A$

## تصحيح إمتحان البكالوريا التجريبي — الموضوع الثاني — 2008/2007

### التمرين الأول :

1/ **إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$** : نسمي $p(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ "

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$ , $u_0 = e$ و $e > 1$ , إذن الخاصية $p(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ ونثبت صحة الخاصية $p(n+1)$

أي من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > 1$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$ ومنه $\sqrt{u_n} \succ 1$ أي : $U_{n+1} > 1$ وبالتالي الخاصية $p(n+1)$ صحيحة

نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أن الخاصية $p(n)$ صحيحة أي : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 1$

2/ **من أجل كل عدد طبيعي n** : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n = \sqrt{U_n}(1 - \sqrt{U_n})$ و بما أن $U_n > 1$ فإن $1 - \sqrt{U_n} < 0$

وبالتالي $U_{n+1} - U_n < 0$ أي أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما

بماأن المتتالية $(U_n)$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة

3/ أ) **من أجل كل n من $\mathbb{N}$ :** $V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln\sqrt{U_n} = \ln(U_n^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(U_n) = \frac{1}{2}V_n$ , إذن المتتالية $(V_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = \ln(e) = 1$

ب/ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ : $V_n = \frac{1}{2^n}$ , من أجل كل n من $\mathbb{N}$ : $U_n = e^{v_n} = e^{\frac{1}{2^n}}$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{2^n}}\right) = 1$

د / من أجل كل n من $\mathbb{N}$ : $s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ,

$$p_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots\dots\dots \times e^{v_{n-1}}$$
$$= e^{v_0+v_1+\dots\dots+v_{n-1}}$$
$$= e^{s_n}$$
$$= e^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

### التمرين الثاني :

1/ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$ تكافىء $(x-2)^2 - 4 + y^2 + (z+1)^2 - 1 + 1 = 0$

تكافىء $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ ، $(S)$ سطح كرة مركزها $\Omega(2,0,-1)$ ونصف قطرها $r = 2$

2/أ) $\overrightarrow{AB}(5;2;-4)$ , $\overrightarrow{AC}(3;2;-2)$ ، لا يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ إذن النقط $A$ , $B$ و $C$ ليست في إستقامية

ب) ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي $(p)$ وبالتالي : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ ، مركبات الشعاع $\vec{n}$ هي حل للجملة :

$\begin{cases} 5a+2b-4c=0 \\ 3a+2b-2c=0 \end{cases}$ , نأخذ $a = 1$ فيكون : $b = -\frac{1}{2}$ و $c = 1$ أي $\vec{n}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$

تكون $M(x;y;z)$ نقطة من $(p)$ إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ أي $x + 2 - \frac{1}{2}y + z = 0$ أي : $\boxed{2x - y + 2z + 4 = 0}$

ج) بماأن $(D)$ عمودي على $(p)$ فإن الشعاع $\vec{n}$ شعاع توجيه للمستقيم $(D)$ : $M(x;y;z)$ نقطة من $(D)$ يعني: $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$

( حيث t عدد حقيقي) ومنه $\begin{cases} x-2=t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z-1=t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t+1 \end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم $(D)$

3) $d(\Omega,p) = 2$ , بما أن $d(\Omega,p) = r$ فإن المستوي $(p)$ مماس لسطح الكرة $(S)$

**تعيين إحداثيات النقطة H نقطة التماس بين المستوى $(p)$ و سطح الكرة $(S)$ :**

النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على المستوي $(P)$ و H تنتمي إلى المستقيم $(D)$ إذن إحداثياها $(x;y;z)$ حيث $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z = t+1 \end{cases}$

$H \in (P)$ يعني : $2(t+2) - \left(-\frac{1}{2}t\right) + 2(t+1) + 4 = 0$ ومنه : $t = -\frac{4}{3}$ وبالتالي : $H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$



### التمرين الثالث :

I/ 1/ $(E)$ $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ ؛ $2^3 + 2\times2^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ , إذن العدد 2 حل للمعادلة $(E)$

**تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ :** $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ ، $b = 4$ ، $c = 8$ ومنه : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + 4z + 8)$

2/ $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ تكافىء $(z-2)(z^2+4z+8) = 0$ تكافىء $z = 2$ أو $(z^2+4z+8) = 0$

$\Delta'$ المميز المختصر للمعادلة $(z^2+4z+8) = 0$ حيث : $\Delta' = -4 = (2i)^2$ ؛ $z_1 = -2-2i$ و $z_2 = -2+2i$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي : $s = \{2, -2-2i, -2+2i\}$

$z_0 = 2 = 2[\cos(0) + i\sin(0)]$ ، $z_1 = -2-2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$ ، $Z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

II / 1) أ)

ب) $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان : $AB = DC$ أي : $z_B - z_A = z_c - z_D$ ومنه : $z_c = z_B - z_A + z_D = 2 + 4i$

3/ $E$ صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي $z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$ أي $z_E - z_B = -i(z_c - z_B)$

ومنه $z_E = -i(z_C - z_B) + z_B = -i(2 + 4i - 2) + 2 = 6$ , وبنفس الطريقة نجد : $z_F = -4 + 6i$

4/ أ) $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-1+4i}{4+i} = \frac{17i}{17} = i$

ب) لدينا : $\left|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = |i| = 1$ ومنه $|z_F - z_A| = |z_E - z_A|$ أي $AF = AE$ و لدينا أيضا $\arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث AEF قائم في A و متساوي الساقين

### التمرين الرابع :

$$f(x) = \frac{4x^3}{(2x-1)^2}$$

1/ **دراسة تغيرات الدالة $f$ :** $D_f = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2}\right) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2}\right) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

**إتجاه التغير:** الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ و $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ حيث : $f'(x) = \frac{4x^2(4x^2 - 8x + 3)}{(2x-1)^4}$

**جدول التغيرات :**

| x | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{27}{8}$ | ↗ | $+\infty$ |

/2 **حساب العددين a و b :** من أجل كل $x$ من $D_f$ : $f(x) = x+1+\dfrac{ax+b}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^3+(a-3)x+b+1}{(2x-1)^2}$

بالمطابقة نجد : $a=3$ و $b=-1$ ومنه $f(x)=x+1+\dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}$

/3 بما أن $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{1}{2}$ مقارب للمنحني $(C)$

وبماأن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}\right] = 0$ فإن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني $(C)$

**دراسة وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ :** $\left[f(x)-(x+1)\right]=\dfrac{3x-1}{(2x-1)^2}$

من أجل $x=\dfrac{1}{3}$ فإن : $(C)\cap(\Delta)=\left\{A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$ ، و من أجل $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$ فإن المنحني $(C)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$

و من أجل $x\in\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني $(C)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$

/4 معادلة للمماس $(T)$ للمنحني $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 من الشكل : $y=0$

/ رسم كل من $(T)$ و $(C)$ :

/6 $-4x^3+4mx^2-4mx+m=0$ تكافىء

$m=\dfrac{4x^3}{(2x-1)^2}$ أي $f(x)=m$ ........... $(I)$

**المناقشة البيانية :**

من أجل $m\in\left]-\infty;0\right[$ فإن المعادلة $(I)$ تقبل حلا واحدا سالبا تماما

من أجل $m=0$ فإن المعادلة $(I)$ تقبل حلا مضاعفا معدوما

من أجل $m\in\left]0;\dfrac{27}{8}\right[$ فإن المعادلة $(I)$ تقبل حلا واحدا موجبا تماما

من أجل $m=\dfrac{27}{8}$ فإن المعادلة $(I)$ تقبل حلين موجبين تماما أحدهما مضاعف

من أجل $m\in\left]\dfrac{27}{8};+\infty\right[$ فإن المعادلة $(I)$ تقبل ثلاثة حلول موجبة تماما

/7 $g(x)=\dfrac{4x^3}{(2|x|-1)^2}$ ، $D_g=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

**إثبات أن الدالة g فردية :**

من أجل كل $x$ من $D_g$, $(-x)$ ينتمي إلى $D_g$ و $g(-x)=\dfrac{4(-x)^3}{(2|-x|-1)^2}=-\dfrac{4x^3}{(2|x|-1)^2}=-g(x)$ إذ ن الدالة g فردية.

من أجل $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $g(x)=f(x)$ وبالتالي المنحني $(\Gamma)$ منطبق على المنحني $(C)$

وبما أن الدالة g فردية فإن المنحني $(\Gamma)$ متناظر بالنسبة إلى المبدأ O .

## على التلميذ أن يعالج أحد الموضوعين على الخيار

## الموضوع الأول

### التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ و ليكن $(D)$ المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$
2. بين أن المستقيمين $(AB)$ و $(D)$ لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي $(P)$ الذي يوازي $(D)$ و يشمل $(AB)$
   - أ. بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$
   - ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$
   - ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من $(D)$ و $(P)$ ثابتة ، حدد هذا الثابت
   - د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المعرف بتقاطع $(P)$ و المستوي $(Oxy)$
   - ه. عين مجوعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   - و. لتكن $(S)$ سطح كرة التي تمس $(P)$ في النقطة $C(10;1;6)$ حيث مركزها $\omega$ يبعد عن $(P)$ بمسافة $d=6$ و يقع من جهة $O$ ، عين معادلة ديكارتية لـ $(S)$
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي $(OAB)$ ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له
   ب/ بين أن المستوي $(OAB)$ و سطح الكرة $(S)$ يتقاطعان و فق دائرة $(\Gamma)$ يطلب تحديد عناصرها المميزة

### التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ : $z^2-4z+16=0$
   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب $y_k$ المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : $k$ عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013}=0$ و أكتب العد $-2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث $\alpha$ عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين $A$ و $B$ ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ و لتكن $C$ النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5-2^{2015}y_{2015}$
   - أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -2^{2015}\ y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي $f$ الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن $A_0$ النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث: $Z_n$ لاحقة $A_n$
نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي

أ. بين أن $(U_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول $U_0$ و أساسها $q$

ب. استنتج عبارة $U_n$ بدلالة $n$ ، ثم أحسب بدلالة المجموع $S_n$ حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(U_0^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

## التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) ....... 5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن : $x$ مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة $(E)$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$

ج/ استنتج حلول الجملة $(S)$ : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د/ حل الجملة $(S)$ بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة $(E)$ التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين و $\beta$ حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة $(E)$

## التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $IR$ بـ : $f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$ و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ و المستقيم

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم $(D')$ الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(D')$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم $(D')$، و $(C)$

5. ليكن $(\Delta_m)$ المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث $m$ وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات $(\Delta_m)$ تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد نقاط تقاطع المستقيم $(\Delta_m)$ و المنحنى $(C)$

II. نضع : $I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد $I$

2. بين أنه من كل $x$ من ، $\ln(1+X)\le X$

3. استنتج أن: $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$

# الموضـــــوع الثاني

## التمرين الأول :(5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $H$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث $a$ عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن

1. أ/ تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}(z_A-z_C)$

ب/ استنتج أن المستقيمين $(AC)$ و $(BD)$ متعامدان

2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي يحول $A$ إلى $B$ و يحول $C$ إلى $D$

ب/ حدد $z_\Omega$ لاحقة المركز $\Omega$ للتحويل $S$ ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل

ج/ بين أن المثلثين $OAC$ و $BHD$ متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما

3. لتكن $(M_n)$ متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي : $M_{n+1}=S(M_n)$

حيث $z_n$ لاحقة النقطة $M_n$ و نضع : $U_n=|z_n-z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي

أ/ بين أن $(U_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب/ عين قيم $a$ بحيث تكون $(U_n)$ متتالية متقاربة

ج/ نرمز بـ $T_n$ إلى مجموع الأطوال القطع المستقية $[A\Omega],[M_1\Omega]...............,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$

- أحسب المجموع $T_n$ بدلالة

4. لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $Z$ التي تحقق : $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$

- حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma)$ لما يمسح العدد $\theta$ المجموعة $\mathbb{R}$

## التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح $m$ بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$..........(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة $(1)$ الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$

3. بين أن العددين $x$ و $y$ أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة $(1)$

4. عين قيم العدد الطبيعي بحيث : $n\equiv 4[25]$ و باقي قسمة على العدد $106$ هو $17$

5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة $(1)$ بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد $10$

## التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$

2. استنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي $(ABC)$

3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $AM = CM$ هي المستوي $(P')$ الذي معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$

ج/ بين أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم $(\Delta)$ يقطع المستوي $(ABC)$ في نقطة $\omega$ يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن $\omega$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$

5. نعتبر النقطة $G_\alpha$ مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2);(C;-2\alpha^2)\}$ حيث $\alpha$ وسيط حقيقي

- عين بدلالة $\alpha$ إحداثيات $G_\alpha$ و استنتج مجموعة النقط $G_\alpha$ عندما تتغير $\alpha$ في $\mathbb{R}$

## التمرين الرابع :(7 نقط)

I. نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$ .

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1. أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ .
2. أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ،ثم استنتج إتجاه تغير الدالة $f$ .
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .
4. حل المعادلة $f(x)=0$ استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.
5. أحسب $f(1)$ ثم أنشئ $(C_f)$.
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $f(x)=f(m)$
7. أ) عين العددين الحقيقين $a$ ، $b$ بحيث تكون الدالة $F$ دالة أصلية للدالة $f$ حيث : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ .

ب) أحسب بـ $cm^2$ وبدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=\lambda$ حيث $\lambda \prec \frac{1}{2}$ .

ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} S(\lambda)$

II

نسمي $f'=f^{(1)}$ ، $f''=f^{(2)}$ ، $f^{(3)}$ ،.......... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$ .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ المنحنى $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ يقبل مماس في النقطة $M_n(x_n;y_n)$ يوازي حامل محور الفواصل ،حيث $f^{(n)}$ هي الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ .

أ) أحسب بدلالة $n$ كلا من $x_n$ ، $y_n$ .

ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$ .

جـ) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ،ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$ .

بالتوفيق والسداد

## الموضوع الأول

**التمرين الأول :**

**1.تمثيل الوسيطي لـ $(AB)$ :**

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة $A(8;0;8)$ إذن : $(AB):\begin{cases}x=2\lambda+8\\y=3\lambda\\z=2\lambda+8\end{cases};\lambda\in IR$

**2.تبيان أن $(AB)$ و $(D)$ لاينتميان إلى نفس المستوي:**

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ $(AB)$ و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه لـ $(D)$ و منه : $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه $(AB)$ و $(D)$ غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases}-5+3t=2\lambda+8...(1)\\1+2t=3\lambda....(2)\\-2t=2\lambda+8....(3)\end{cases}$ بعد التبسيط بين المعادلتين$(2)$ و$(3)$ نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا تحقق المعادلة $(1)$ إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن $(AB)$ و $(D)$ لاينتميان إلى نفس المستوي

**3. $(P)$ المستوي الذي يوازي $(D)$ ويشمل $(AB)$**

**أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ $(P)$ :**

**يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{u_{(D)}}$**

**لدينا :** $\begin{aligned}&\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0\\&\vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0\end{aligned}$

**ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ$(P)$ :**

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ $(P)$ و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج :

ومنه : $\begin{aligned}&2(8)+0(-2)+1(8)+d=0\\&d=-24\end{aligned}$

$(P):2x-2y+z-24=0$

**ج. تبيان أن المسافة $d((P);(D))$ ثابتة مع تحديد الثابت :**

**لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$**

**ومنه :**

$$d((P);(D))=d((P);M)=\frac{|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

**ومنه : $d((P);(D))=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$**

**د. التمثيل الوسيطي لـ$(\Delta)$ المعرف بتقاطع $(P)$ و $(Oxy)$ :**

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-2y+z-24=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$ و بوضع : $y=k$ ينتج :

$\begin{cases}x=y+12\\y=k\\z=0\end{cases}$ أي : $(\Delta):\begin{cases}x=k+12\\y=k\\z=0\end{cases};k\in IR$

**هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :**

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء

$\begin{cases}2x-2y+z-24=0\\z=0\end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم $(\Delta)$

**و. تعيين معادلة ديكارتية لـ$(S)$ :**

نصف قطر لـ$(S)$ هو $C\omega=6$

**لنعين إحداثيات** $\omega$ : لنفرض $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ حيث $(\Delta')$ المستقيم العمودي على $(P)$ في $C$ ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases}x=2k'+10\\y=1-2k'\\z=6+k'\end{cases};k'\in IR$ ومنه : $d((P);\omega)=6$ بعد التبسيط نجد : $d((P);\omega)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(6;5;4)$ أو $\omega(14;-3;8)$

بتعويض إحداثيات كل من $\omega$ و النقطة $O$ في معادلة $(P)$

$O(0;0;0):-24<0$

نجد : $\omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0$ اذن

$\omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0$

$\omega(6;5;4)$ و النقطة $O$ في نفس جهة من المستوي $(P)$ **إذن**

**معادلة لـ$(S)$هي : $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$**

**4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو$(OAB)$ :**

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ$(OAB)$ و يشمل النقطة $O$ إذن :

$(OAB):\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases};(t';\lambda')\in IR^2$

**استنتاج المعادلة الديكارتية لـ$(OAB)$ :**

$\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\\lambda'=\frac{y}{3}\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

$(OAB):x-z=0$ :

**ب. تبيان أن $(S)$ و $(OAB)$ متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :**

لدينا : $d\left(\left(OAB\right);\omega\right)=\frac{\left|6-4\right|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2}<6$ إذن :

$(OAB)\cap(S)$ هو دائرة

المستقيم الذي يشمل $\omega$ ويعامد $(OAB)$ هو :

$\begin{cases} x=6+h \\ y=15 \quad ;h\in IR \\ z=4-h \end{cases}$ ومنه مركز الدائرة هو $\Omega$ نقطة تقاطع

هذا المستقيم مع $(OAB)$ وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و

$\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها $r$ حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2\left(\left(OAB\right);\omega\right)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$$

**التمرين الثاني :**

**1.تعيين العددين الحقيقين $a$ و $b$ :**

$\begin{cases} (a+i)^2=2+2i\sqrt{3} \\ (b-i)^2=2-2i\sqrt{3} \end{cases}$ **ومنه :** $\begin{cases} a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3} \\ b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3} \end{cases}$ **بالمطابقة**

**نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$**

**2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :** $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2=2-2i\sqrt{3}$

**ب.استنتاج حلول المعادلة** $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$$

**3.تبيان أن** $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ :

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

**استنتاج أن** $y_{2013}=0$ : لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

**كتابة** $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$ :

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

**4.أ.تحقق أن** : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$ :

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\frac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

**ب.تبيان :** $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$ :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

**تحديد طبيعة التحويل** $f$ :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافئ $z_B-z_C=i\sqrt{3}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه : $\left|z_B-z_C\right|=\sqrt{3}\left|z_A-z_C\right|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

يكافئ : $\begin{cases} CB=\sqrt{3}CA \\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ اذن $f$ تشابه مباشر مركزه $C$ و

نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

**ايجاد العبارة المركبة :** $f$ تشابه مباشر مركزه $C$ و نسبته

$\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C\left(1-\alpha\right)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

**5.أ.تبيان أن $(U_n)$ متتالية هندسية مع تحديد أساسها $q$ و حدها الأول $U_0$ :**

**لدينا :**

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|=\left|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta\right|$$

$$=\left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|i\sqrt{3}\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sqrt{3}U_n$$

**ومنه $(U_n)$ هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول**

$$U_0=\left|z_1-z_0\right|=\left|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0\right|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

**ب.استنتاج عبارة $U_n$ بدلالة** $n$ :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

**حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ :**

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

**ج.برهان بالتراجع :**

**نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا :** $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ **الطرف1**

$\sqrt{128-32\sqrt{3}} = \left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times....\times U_n\times U_{n+1} = \left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}^{n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

**التمرين الثالث :**

**1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن $x$ مضاعف لـ $3$ :**

**إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن : $5x-6y=3$ ومنه : $5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و $3$ و $5$ أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$**

**ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة $(E)$**

**لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن $(E)$ تكافيء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة $(E)$ معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$**

**ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times2+1$ ومنه $1=5-2(2)$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$**

**حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$ :**

**لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي :**

**$5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا $6$ و $5$ أوليان فيمابينها و $6/5(x-3)$ أي $6/(x-3)$ ومنه $x=6k+3$**

**بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$**

**ج.استنتاج حلول الجملة $(S)$ :**

**$(S)$ تكافيء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي :**

**$5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد : $(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة $\alpha$ و $\beta$ في $x$ نجد: $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$**

**د. حل الجملة $(S)$ بطرق غير استنتاجية :**

**$(S)$ تكافيء $\begin{cases}5x\equiv-5[30]\\6x\equiv-24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv-19[30]$ أي :**

**$x\equiv-19[30]$ ومنه $x\equiv11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$**

**2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ حيث :**

$(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ و $x^2-y^2\le56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le56$ تكافيء $11k^2+16k-51\le0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

**4.تعين $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة $(E)$ :**

**لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5$ فإن : $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :**

**$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و**

**$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times5^3=126\alpha+25\beta$**

**$(a;b)$ حلا للمعادلة $(E)$ يكافيء $5a-6b=3$ ومنه :**

**$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد**

**$51\alpha+25\beta=202$ و بما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$**

**ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$**

**التمرين الرابع :** $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

**1.أ.إثبات أنه من أجل كل $x$ من $IR$ : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$**

**لدينا :** $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

**ب.حساب نهاية $f$ عند $+\infty$ :**

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty} x+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$ **لإن : $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ ومنه :**

$\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$ **ومنه** $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

**تبيان أن $(D)$ ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ :**

**$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن $(D)$ م م لـ $(C)$ عند $+\infty$**

**ج.دراسة الوضعية النسبية لـ$(C)$ بالنسبة $(D)$ :**

**ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$**

**لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل $x$ من $IR$ ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل $x$ من $IR$ ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل $x$ من $IR$ ومنه $f(x)-x>0$ اذن $(C)$ يقع فوق $(D)$ من اجل كل $x$ من $IR$**

**2.أ. إثبات أنه من أجل كل $x$ من $IR$ :** $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^x+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^x}\right)$

$=\ln(2+e^{2x})-\ln e^x=-x+\ln(2+e^{2x})$

**ب.حساب نهاية $f$ عند $-\infty$ :**

لأن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln(2+e^{2x})=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0;\ \lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

**تبيان أن $(D')$ ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$ :**

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+\ln 2))=\lim_{x\to+\infty}(-x+\ln(2+e^{2x})+x-\ln 2)$

$=\lim_{x\to-\infty}\ln(2+e^{2x})-\ln 2=0$

إذن $(D')$ م م لـ $(C)$ عند $-\infty$

**ج.دراسة الوضعية النسبية لـ$(C)$ بالنسبة $(D')$:**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل $x$ من $IR$ ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل $x$ من $IR$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل $x$ من $IR$ و منه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن $(C)$ يقع فوق $(D')$ من اجل كل $x$ من $IR$

**3.دراسة إتجاه تغير $f$ :** $f$ ق إ على $IR$ حيث :

$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^x(e^x+2e^{-x})}$

**إشارة $f'(x)$** : تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^x(e^x+2e^{-x})>0$

$e^{2x}-2\geq 0$ معناه : $e^{2x}\geq 2$ معناه $2x\geq\ln 2$ أي $x\geq\frac{\ln 2}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

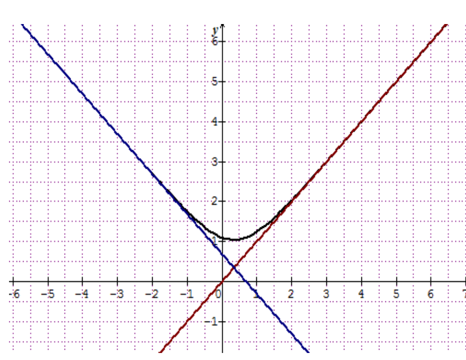
الدالة $f$ متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

**جدول تغيرات $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $\frac{3\ln 2}{2}$ | ↗ $+\infty$ |

**4.الرسم:**



**5.أ.تبيان أن جميع المستقيمات $(\Delta_m)$ تمر من نقطة ثابتة**

من أجل كل عدد حقيقي $m$ : لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافيء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافيء : $\begin{cases} y-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ x-\frac{\ln 2}{2}=0\end{cases}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};y=\frac{\ln 2}{2}$

**ب. المناقشة البيانية:**

إذا كان $m=1$ فإن $(\Delta_m)$ هو $(D)$

إذا كان $m=-1$ فإن $(\Delta_m)$ هو $(D')$

$(D)$ و $(D')$ يتقاطعان في نقطة الثابتة $A$

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن $(\Delta_m)$ لايقطع المنحنى $(C)$

إذا كان $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن $(\Delta_m)$ يقطع المنحنى $(C)$ في نقطة وحيدة

**II .1. تفسير الهندسي للعدد $I$** : $I$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C)$ و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

**2.تبيان من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$ :** $\ln(1+X)\leq X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة $h$

لدينا $h$ ق إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه $h$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و $h$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدالة $h$ سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه $\ln(1+X)-X\leq 0$ أي $\ln(1+X)\leq X$

**3.استنتاج أن** $0\leq I\leq\int_2^3 2e^{-2x}dx$ :

لدينا : $I=\int_2^3(f(x)-x)dx=\int_2^3\ln(1+2e^{-2x})dx$ و بما أن : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل $x$ من $IR$ ($[2;3]$)

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \le 2e^{-2x}$ ومنه :

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ أي $I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \ge 0$ و بما أن $2 < 3$ فإن

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \ge 0$ أي $I \ge 0$ ومنه : $0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

## الموضوع الثاني

**التمرين الاول :**

**1ـأ/ تحقق أن :** $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

لدينا: $z_B - z_D = 1+\frac{a-1}{a}i+\frac{1}{a}i$

$= 1+\frac{a-1+1}{a}i = 1+i$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)=\frac{1}{a}i\left(a-ai\right)=i+1$

ومنه : $z_B-z_D=\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)$

**ب/ استنتاج أن المستقيمين $(AC)$ و $(BD)$ متعامدان :**

من السؤال ـأـ لدينا : $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\overline{z_D}=\frac{1}{a}i$ و منه :

$\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{a}i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ لان $\frac{1}{a}>0$ وبالتالي :

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $(AC)$ و $(BD)$ متعامدان

**2ـ أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$**

الكتابة المركبة للتشابه $S$ من الشكل : $z'=\alpha z+\beta$

لدينا $S(A)=B$ معناه : $z_B=\alpha z_A+\beta$ ....(1)

$S(C)=D$ معناه : $z_D=\alpha z_C+\beta$ ....(2) ومنه بطرح (1) من (2) نجد : $z_B-z_D=\alpha\left(z_A-z_C\right)$ ومنه : $\alpha=\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\overline{z_D}$

ومنه : $\alpha=\frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D=\alpha z_C+\beta$ ومنه : $\beta=z_D-\alpha z_C$ أي : $\beta=-\frac{1}{a}i-\frac{1}{a}i(ai)$ ومنه : $\beta=1-\frac{1}{a}i$

الكتابة المركبة للتشابه $S$ هي : $z'=\frac{1}{a}iz+1-\frac{1}{a}i$

**ب/ تحديد $z_\Omega$ لاحقة المركز $\Omega$ للتشابه $S$ :**

نعلم أن : $z_\Omega=\frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega=\frac{1-\frac{1}{a}i}{1-\frac{1}{a}i}=1$ ومنه $z_\Omega=1$

- **تحديد العناصرة المميزة للتشابه $S$ :**

$S$ تشابه مباشر مركزه $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega=1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a}>0$)

**ج/ تبيان أن المثلثين $OAC$ و $BHD$ متشابهان :**

لدينا $S(A)=B$ و $S(C)=D$

لنحدد لاحقة النقطة $O$ بالتشابه $S$

$z'=\frac{1}{a}i(0)+1-\frac{1}{a}i=1-\frac{1}{a}i=z_H$ لأن $z_H=1+z_D=1-\frac{1}{a}i$

وهكذا $S(O)=H$

إذن صورة المثلث $OAC$ بالتشابه $S$ هو المثلث $BHD$ ومنه المثلثان $OAC$ و $BHD$ متشابهان

- **ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :**

$A(BHD)=\left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD)=\frac{A(OAC)}{a^2}$

**3ـ أ/تبيان أن $(U_n)$ متتالية هندسية :**

لدينا : $U_{n+1}=\left|z_{n+1}-z_n\right|=\Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$ فإن : $\Omega M_{n+1}=\frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1}=\frac{1}{a}\Omega M_n=\frac{1}{a}\left|z_n-z_\Omega\right|=\frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}=\frac{1}{a}U_n$ ومنه $(U_n)$ متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|z_0-z_\Omega\right|=\left|a-1\right|$ أي : $U_0=\left|a-1\right|$

**ب/ تعيين قيم $a$ بحيث تكون $(U_n)$ متقاربة :**

$(U_n)$ متقاربة يعني : $-1<q\le1$ أي : $-1<\frac{1}{a}\le1$ و بما أن

$\frac{1}{a}>0$ ينتج : $0<\frac{1}{a}\le1$ أي $a\ge1$ و بما أن $a\neq1$ فإن : $a>1$

أي : $a\in\left]1;+\infty\right[$

**ج/ حساب المجموع $T_n$ بدلالة $n$ :**

$T_n=M_{n+1}\Omega+M_n\Omega+......+M_0\Omega$ (نلاحظ أن :

$U_n=\left|z_n-z_\Omega\right|=U_n$) ومنه : $T_n=U_{n+1}+U_n.......+U_0$ ومنه

$T_n=U_0\left(\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\right)$ ومنه : $T_n=\left|a-1\right|\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$ ومنه :

$$T_n=a\times\frac{\left|a-1\right|}{a-1}\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$$

**4ـ لدينا** $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ و $\theta\in IR$ :

- **تحديد طبيعة مجموعة النقط $(\Gamma)$ :**

$Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ يكافيء :

$Z=a+ae^{i\theta}$ يكافيء $Z-a=ae^{i\theta}$ و بما أن $\theta\in IR$

يكون لدينا $\left|Z-a\right|=\left|a\right|=a$ لان $a>0$ أي $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها $A$ ذات اللاحقة $a$ و نصف قطرها $r=a$

**التمرين الثاني :**

**I. تعيين قيم $m$ بحيث تقبل المعادلة $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ :**

$2014\alpha=475\beta+m$ تكافىء $2014\alpha-475\beta=m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha = 475\beta + m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

**II.** **لدينا المعادلة $2014x-475y=-19$....(1) :**

**1.تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$ :**

**المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء $106x-25y=-1$...(*) ولدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة (*) نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$**

**2.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1):**

**المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجوعة الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1$...(*)**

**بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة (*) فإن :**

$$106(4)-25(17)=-1...(E)$$

**من (*) و $(E)$ نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :**

$$106(x-4)=25(y-17)$$

**لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$**

**بتعويض $x$ نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$**

**3.تبيان أن $x$ و $y$ أوليان فيمابينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1):**

**لدينا $d$ قاسم مشترك لـ $x$ و $y$ أي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ إذن $d/106x-25y$ : أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$**

**إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه $x$ و $y$ أوليان فيمابينهما**

**4. تعين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $n\equiv4[25]$ وباقي قسمة $n$ على 106 هو 17:**

**أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv4[25]\\n\equiv17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{cases}$ ومنه**

**: $106\beta+17=25\alpha+4$ ومنه $106\beta-25\alpha=-13$**

**لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال 2**

**نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases}; p\in\mathbb{N}$ لكن $n=106\beta+17$ بالتعويض نجد**

**$n=106(25p+52)+17$ ومنه :**

$$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$$

**5.تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :**

**لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$**

**ولدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv0[10]$ أي : $131k+21\equiv0[10]$ أي : $k+1\equiv0[10]$ أي $k\equiv-1[10]$ أي $k\equiv9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :**

$$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$$

**التمرين الثالث :**

**1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ :**

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $B\hat{A}C$ :

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$ ومنه :

$$COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$$ ومنه

$$B\hat{A}C=77^0$$

**2.استنتاج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية :**

بما أن : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=77^0$ فإن $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية

**استنتاج أن معادلة المستوي $(ABC)$ هي** $2x-y+2z+2=0$

**لدينا :**

$$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$$

$$B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$$

$$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$$

**ومنه معادلة المستوي $(ABC)$ هي $2x-y+2z+2=0$**

**3.أ. كتابة معادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ المستوي المحوري لـ$[AB]$:**

**$(P)$ المستوي المحوري لـ$[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :**

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$$

**ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$**

**ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي المستوي $(P')$ معادلته $4y+2z-7=0$ :**

**معناه : $AM=CM$ :**

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$$

**وبعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)**

**ج. تبيان أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان :** لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ ومنه $\frac{0}{6}\neq\frac{4}{4}\neq\frac{2}{-4}$ إذن $(P)$ و $(P')$

متقاطعان وفق مستقيم

**تعيين التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ مستقيم تقاطع $(P)$ و $(P')$**

لدينا : $\begin{cases} 6x+4y-4z-1=0 \\ 4y+2z-7=0 \end{cases}$ ومنه :

$\begin{cases} 6x-2z+7-4z-1=0 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 6x-6z=-6 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \\ z=z \end{cases}$ إذن :

$\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ إذن : $(\Delta):\begin{cases} x=t-1 \\ y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR \\ z=t \end{cases}$

**4.أ/ تبيان أن $(\Delta)$ يقطع المستوي $(ABC)$ في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:**

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ $\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-1;2)$ ومنه : $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن

$\vec{u}_{(\Delta)}//\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن $(\Delta)$ و $(ABC)$ متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي $\omega$

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

**ب/ استنتاج أن $\omega$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ :**

لتبيان أن $\omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

**5.** النقطة $G_\alpha$ مرجح الجملة

حيث : $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ عدد حقيقي

**ـ تعين احداثيات النقطة $G_\alpha$ :**

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

**ـاستنتاج مجموعة النقط $G_\alpha$ عندما تتغير في $IR$ :**

لدينا : $\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2 \quad ;\alpha^2\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2 \end{cases}$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

$\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\lambda+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\lambda \quad ;\lambda\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\lambda \end{cases}$ ومنه تمثل النقط $G_\alpha$ مستقيم

**I.** **1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.**

- **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$ :**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x}=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

**2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.**

- **حساب المشتقة :**
- $f'(x)=-2e^{2x}+(1-2x)\times 2e^{2x}=(-2+2-4x)e^{2x}=-4xe^{2x}$

$f'(x)=-4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**
- **جدول اشارة المشتقة :**

اشارة $f'(x)$ من اشارة $-x$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | + | 0 | − | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |

- الدالة $f$ **متزايدة على المجال** $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

**3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.**

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

**4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.**

- **حل المعادلة $f(x)=0$ :**
- $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$

يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$

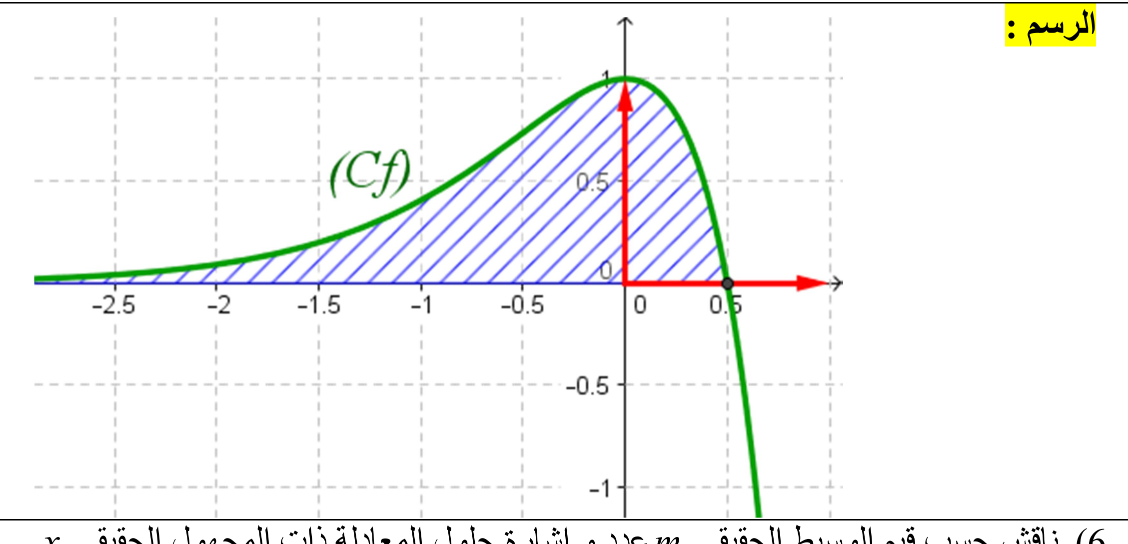
يكافئ $x=\frac{1}{2}$

- **استنتاج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل:**

$(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right)\right\}$

**5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم $(C_f)$.**

- **حساب $f(1)$ :**
- $f(1)=(1-2(1))e^{2\times 1}=-e^{2}=-7.39$

| | |
|---|---|
| | ▪ **الرسم :**  |
| | 6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $(E): f(x)=f(m)$ |
| | ▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:**<br>▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.<br>تغير قيم $f(m)$ حسب قيم $m$<br><br>$m$: $-\infty$ … $0$ … $\frac{1}{2}$ … $+\infty$<br>$f(m)$: $0$ ↗ $1$ ↘ $0$ ↘ $-\infty$<br><br>▪ **المناقشة :**<br>▪ إذا كان $f(m)\in]-\infty;0[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.<br>▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.<br>▪ إذا كان $f(m)\in]0;1[$ أي $m\in]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.<br>▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا. |
| | 7) **أ) عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث تكون الدالة $F$ المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.** |
| | ▪ **تعيين العددين الحقيقيين $b,a$:**<br>- $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$<br>أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$<br>بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$<br>أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$ |

| | |
|---|---|
| ب) أحسب بـ $cm^2$ و بدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0, x=\frac{1}{2}$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$ . | |
| ▪ حساب $S(\lambda)$: <br> $f$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي : <br> $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$ <br> أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$ <br> ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$ | |
| ▪ حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$ : <br> $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان <br> $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$ | |
| **II. نسمي** $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},\dots,f^{(n)}$ **المشتقات المتتابعة للدالة** $f$. <br> **1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم** $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ . | |
| ▪ **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم** $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ <br> - نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . <br> 1) من أجل $n=1$ لدينا : <br> $f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$ <br> ومنه $P(1)$ صحيحة . <br> 2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ <br> ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن <br> $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <br> - لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$ <br> ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$ <br> أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <br> ومنه $P(n+1)$ صحيحة. <br> 3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم. | |
| **2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم** $n$ **المنحني** $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ **الممثل للدالة** $f^{(n)}$ **حيث** $f^{(n)}$ **الدالة المشتقة من الرتبة** $n$ **للدالة** $f$ **يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة** $M_n(x_n;y_n)$. <br> **أ) أحسب بدلالة** $n$ **كلا من** $x_n$ **و** $y_n$ . | |

| | |
|---|---|
| | ▪ حساب $x_n$ و $y_n$ بدلالة $n$: <br> - $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ يقبل مماسا يوازي $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$ <br> أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$ <br> وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$ <br> من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا : <br> $y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$ <br> أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ |
| | ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ . |
| 0.5 | ▪ تبيان أن $(x_n)$ متتالية حسابية : <br> - لدينا : $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$ <br> ومنه $(x_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$. <br> - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ : <br> $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$ |
| | ج) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ |
| | ▪ تبيان أن المتتالية $(y_n)$ هندسية : <br> - لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$ <br> ومنه $(y_n)$ هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$. <br> - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ : <br> $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لأن $-1<2e^{-1}<1$ |

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران ثانوية الشيخ ابراهيم التزي

# اختبار بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: رياضيات المدة: 4 ساعات ونصف 15 ماي 2017

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

### التمرين الأول : (5 نقاط )

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

$p\left(z\right)$ كثير الحدود للمتغير المركب $z$ حيث : $p\left(z\right)=8z^{3}+\left(-16+12i\right)z^{2}+50z-100+75i$

1. أ – عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ التي من أجلها يكون $p\left(\alpha i\right)=0$ .

ب – عين العدد المركب $\beta$ حيث من أجل كل عدد مركب $z$ : $p\left(z\right)=\left(z^{2}+\dfrac{25}{4}\right)\left(8z+\beta\right)$

ج–استنتج حلول المعادلة $p\left(z\right)=0$ .

2. نعتبر النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=2-\dfrac{3}{2}i$ و $z_B=\dfrac{5}{2}i$ .

أ – عين $z_C$ لاحقة النقطة $C$ حيث : $\begin{cases}2\left|z_C-z_A\right|=\left|z_B-z_A\right|\\ \arg\left(z_C-z_A\right)=\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(z_B-z_A\right)\end{cases}$

ب – استنتج أن $C$ هي صورة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

ج – حدد طبيعة المثلث $ABC$ ، ثم أُحسب مساحته .

د – لتكن النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه المباشر $S$. بين أن مساحة المثلث $ACD$ تساوي $\dfrac{5}{4}ua$ .

3. أ–عين العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$.

ب–من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي $T_n$ المعرف بـ : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\ldots\circ S}_{n\ \text{مرة}}$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل $T_n$ هي: $z'=\dfrac{1}{2^{n}}e^{in\frac{\pi}{2}}\left(z-z_A\right)+z_A$.

جـ – عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها التحويل $T_n$ تحاكيا مركزه النقطة $A$ يطلب تعيين نسبته.

4. نعتبر النقطتين $M$ و $N$ صورتي النقطة $B$ بالتحويليين $T_{4k}$ و $T_{4k-2}$ على الترتيب حيث $k\in\mathbb{N}^{*}$ .

أ – بين أن من أجل كل عدد طبيعي $k$ غير معدوم النقطة $A$ تنتمي إلى $\left[MN\right]$ .

ب – أحسب بدلالة العدد طبيعي $k$ الطول $MN$.

جـ – أحسب $\lim\limits_{k\to+\infty}MN$ .

**التمرين الثاني : (4 نقاط )**

I) $t$ ، $a$ و $b$ أعداد طبيعية حيث : $1<t\leq a\leq b$ .

عين الأعداد $t$ ، $a$ و $b$ علماً أنه في النظام ذي الأساس $t$ يكون $a+b=\overline{46}$ و $a.b=\overline{545}$ .



II) نعتبر المعادلة $21x-17y=8$..........(1) حيث $x$ و $y$ عددين طبيعيين .

1. أ – عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $(1)$.

ب – حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $(1)$.

2. أ – ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$، باقي القسمة الاقليدية للعدد $9^n$ على 13.

ب–بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة $(1)$ فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ – بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(1)$ و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$ .

ب – عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(1)$ التي يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$ .

**التمرين الثالث : (4.5 نقاط )**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$؛ نعتبر النقطتين $A(3;0;-2)$، $B(3;3;1)$

والمستقيمين $(\Delta)$الذي يشمل $A$ و $\vec{u}(3;1;-1)$ شعاع توجه له و $(d)$ الذي يشمل $B$ و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجه له.

1. تحقّق أنّ المستقيم $(\Delta)$ هو تقاطع المستويين: $(P_1):x-2y+z-1=0$ و $(P_2):x-y+2z+1=0$

2. $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية المسافة عن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$.

أ – بيّن أنّ النقطة $I(3;\alpha+2;\alpha)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$ حيث $\alpha$ وسيط حقيقي.

ب – بيّن أنّ مجموعة النقط $I$ ، لما تمسح $\alpha$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم $(d)$ .

جـ – جد نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ و بين أن النقطة $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\Delta)$.

د – أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها النقطة $B$ وتمس المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ في النقطتين $C$ و $D$ على الترتيب.

هـ – بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي.

و–استنتج أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

3. أ – بيّن أنّ المجموعة $(\Gamma)$ هي اتحاد مستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما .

( حيث $(Q_1)$ المستوي الذي يشمل المستقيم $(d)$ ).

ب – تحقق أنّ المستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متعامدان

جـ–نسمي $d_1$ المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(Q_1)$ ، $d_2$ المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(Q_2)$.

بيّن أنّ : $d_1=\frac{\sqrt{22}}{4}$ و $d_2=\frac{11\sqrt{2}}{4}$.

**التمرين الرابع : (6.5 نقاط )**

I) $g$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1. أ - احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ .

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة $g$

جـ-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $\ln 4\leq\alpha<\ln 6$ .

د -استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

2. نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\leq u_n<\alpha$ .

ب - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما .

جـ-بين أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

II) $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

وليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ-أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا .

ب-تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

3. أنشئ $(C_f)$ ( نأخذ $\alpha=1{,}5$ ) .

III) $F$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$F(0)=-\ln 2$ و من أجل $x>0$ ، $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ .

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل $x>0$ ، $F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x\ln 2\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$.

3. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة $F$ مستمرة عند القيمة 0 من اليمين .

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (4 نقاط )**

I) $f$ دالة معرفة على المجال $]2,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]2,+\infty[$.

II) $(u_n)$ متتالية معرفة بـ : $u_0=\dfrac{5}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $2<u_n<3$.
2. استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n^2<\dfrac{9}{10}(u_n^2+1)$.
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ، هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة ؟
4. تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-2=\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$.
5. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

**التمرين الثاني : (3.5 نقاط )**

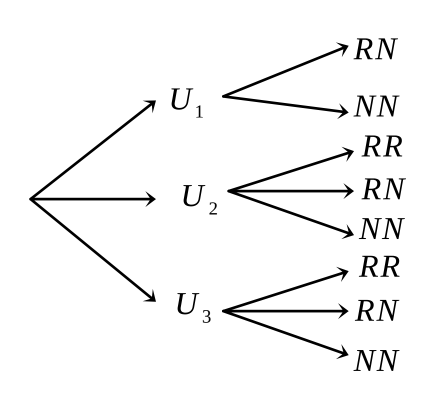
لدينا ثلاثة صناديق $U_1$ ، $U_2$ و $U_3$ حيث الصندوق $U_1$ يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء ،الصندوق $U_2$ يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء أما $U_3$ يحتوي على3 كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي $RR$ "حادثة الحصول على كرتين حمراوين " ، $NN$"حادثة الحصول على كرتين سوداوين "

و $RN$"حادثة الحصول على كرتين مختلفتين ".






1. أنقل هذه الشجرة موضحا عليها كل الاحتمالات .
2. ليكن $X$ المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ – حدد قيم المتغير العشوائي $X$ .

ب – بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $\dfrac{2}{285}$.

ج – بين أن احتمال الحادثة $(X=1)$ يساوي $\dfrac{53}{285}$.



د . استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق $U_3$ ؟

**التمرين الثالث : (5.5 نقاط)**

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية: $z^2=-2-2i\sqrt{3}$ . ( يمكنك وضع $(z=x+iy$

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط $A$ ، $B$ و $C$ لاحقاتها:

$z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$ على الترتيب.

أ – علّم النقط $A$ ، $B$ و $C$.

ب – بين أنّ: $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

جـ–عين المركز ونصف القطر للدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث $ABC$.

3. $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث: $z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)$ و $\theta\in\mathbb{R}$ .

أ – بين أن $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $-2$ ، يطلب تحديد نصف قطرها.

ب – تحقق أنّ النقطتين $A$ و $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$.

4. أ – بين أنّ الدائرة $(\mathcal{C})$ هي صورة الدائرة $(\Gamma)$ بالدوران الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $C$.

5. $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $O$ ، نسبته $\sqrt{2}$ و وزاويته $-\dfrac{\pi}{4}$.

أ – عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$.

ب – بين أنّ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$ هي: $z_D=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

جـ – أُكتب كل من $z_A$ و $z_D$ على الشكل الأسي، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكلّ من $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ .

6. أ–حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $5x-24y=14$

ب – استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ حيث يكون: $\arg(z_D)^n=\dfrac{\pi}{2}+\arg(z_A)$

**التمرين الرابع : (7 نقاط )**

$f$ الدالة المعرّفة بِـ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ،

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$.

$(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

1. أ – ادرس استمرارية الدالة $f$ عند القيمة $x=0$ .

ب – احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

3. أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ، $f'(x)=2x(1-\ln x)$ .

ب–استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4. جد معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $E$ ذات الفاصلة $1$ .

5. نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ –احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ .

ب– بيّن أنّ الدالة $g'$ تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة $1$ ثم استنتج اشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

جـ – استنتج اتجاه تغير الدالة $g$ ، احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

د–استنتج الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ، فسر النتيجة هندسيا .

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يحقق $4,6<\alpha<4,7$ .

7. ارسم في المعلم السابق $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $[0;5]$ .

8. أ –باستعمال المكاملة بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة $1$.

ب – احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\alpha$ و $y=0$ .

جـ – بيّن أن $A(\alpha)=\frac{2\alpha^3+12\alpha-29}{18}u\,a.$ .

بالتوفيـــق

## التصحيح النموذجي لإختبار الباكالوريا التجريبي

**– شعبة الرياضيات –**

**الموضوع الأول**

**التمرين الأول: (5 نقاط )**

$$p(z)=8z^3+(-16+12i)z^2+50z-100+75i$$

**1.** أ - $p(\alpha i)=0$ يكافئ

$8(\alpha i)^3+(-16+12i)(\alpha i)^2+50\alpha i-100+75i=0$ ويكافئ

$$(16\alpha-100)+i(-8\alpha-12\alpha+50\alpha+75)=0$$

ويكافئ $\begin{cases}16\alpha-100=0\\ -8\alpha-12\alpha+50\alpha+75=0\end{cases}$

ويكافئ $\begin{cases}\alpha=\frac{5}{2} \text{ أو } \alpha=-\frac{5}{2}\\ -8\alpha^3-12\alpha^2+50\alpha+75=0\end{cases}$

و يكافئ $\alpha=-\frac{5}{2}$ أو $\alpha=-\frac{5}{2}$

ب – من أجل كل عدد مركب $z$ لدينا :

$$p(z)=\left(z^2+\frac{25}{4}\right)(8z+\beta)$$
$$=8z^3+\beta z^2+50z+\frac{25}{4}\beta$$

بالمطابقة نجد : $\beta=-16+12i$

جـ – استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$ .

$p(z)=0$ يكافئ $\left(z^2+\frac{25}{4}\right)(8z-16+12i)=0$ يكافئ

$z^2+\frac{25}{4}=0$ أو $8z-16+12i=0$

ويكافئ $z^2=\frac{25}{4}$ أو $8z=16-12i$

ويكافئ $z=\frac{5}{2}i$ أو $z=-\frac{5}{2}i$ أو $z=2-\frac{3}{2}i$

**2.** $z_A=2-\frac{3}{2}i$ و $z_B=\frac{5}{2}i$ .

أ – تعيين $z_C$ لاحقة النقطة $C$ حيث :

$$\begin{cases}2|z_C-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg(z_C-z_A)=\frac{\pi}{2}+\arg(z_B-z_A)\end{cases}$$

يكافئ $\begin{cases}|z_C-z_A|=\frac{1}{2}|z_B-z_A|\\ \arg(z_C-z_A)-\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

و يكافئ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

و يكافئ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}i$

و يكافئ $z_C-z_A=\frac{1}{2}i(z_B-z_A)$

ويكافئ $z_C=\frac{1}{2}i(z_B-z_A)+z_A$

ويكافئ $z_C=\frac{1}{2}i\left(\frac{5}{2}i-2+\frac{3}{2}i\right)+2-\frac{3}{2}i=-\frac{5}{2}i$

ب – استنتج أن $C$ هي صورة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ يطلب تعيين نسبته و زاوية له . $z_C-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$

وعليه فان $C$ هي صورة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و نسبته $\frac{1}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له

جـ –حدد طبيعة المثلث $ABC$ ، ثم أُحسب مساحته .

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

معناه $AB=2AC$ و $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ و هذا يعني أن

المثلث $ABC$ قائم في $A$

مساحة المثلث $ABC$:

$AB=|z_B-z_A|=2\sqrt{5}$ و $AC=|z_C-z_A|=\sqrt{5}$

إذن $S_{(ABC)}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{2}=5ua$

د – لتكن النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه المباشر $S$. بين أن مساحة المثلث $ACD$ تساوي $\frac{5}{4}ua$ .

لدينا : $S(A)=A$ ، $S(B)=C$ و $S(C)=D$

إذن: $S(ABC)=ACD$ وعليه $S_{(ACD)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{(ABC)}=\frac{5}{4}ua$

**3.** أ –عين العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$.

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$S(M)=M'$ يكافئ $z'-z_A=\frac{1}{2}i(z-z_A)$

و يكافئ $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{5}{4}-\frac{5}{2}i$

ب – من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي $T_n$ المعرف بـ : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\ldots\circ S}_{n \text{ مرة}}$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل $T_n$ هي:

$z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$ .

نسمي $P(n)$ الخاصية * العبارة المركبة للتحويل $T_n$ هي:

$$* \; z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$$

• نتحقق من $P(2)$

لدينا: $T_2 = S \circ S$

لتكن $M(z)$ صورتها النقطة $M_1(z_1)$ بالتحويل $S$ و النقطة $M_1(z_1)$ صورتها النقطة $M'(z')$ بالتحويل $S$

لدينا : $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$

و $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1-z_A)+z_A$

معناه $M'=T_2(M)$

$$z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A-z_A\right)+z_A$$

ومعناه $z'=\frac{1}{2^2}e^{i2\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$ ومنه $P(2)$

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي العبارة المركبة للتحويل $T_n$ هي: $z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$

أي العبارة المركبة للتحويل $T_{n+1}$ هي:

$$z'=\frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$$

لدينا: $T_{n+1}=T_n \circ s$ ،

لتكن $M(z)$ صورتها النقطة $M_1(z_1)$ بالتحويل $S$ و النقطة $M_1(z_1)$ صورتها النقطة $M'(z')$ بالتحويل $T_n$

لدينا : $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$

و $z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$

معناه $M'=T_{n+1}(M)$

$$z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A-z_A\right)+z_A$$

أي: $z'=\frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A$ ومنه $P(n+1)$

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 2$ ، العبارة المركبة للتحويل $T_n$ هي:

$$z'=\frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z-z_A)+z_A .$$

جـ–عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها التحويل $T_n$ تحاكيا مركزه النقطة $A$ يطلب تعيين نسبته.

التحويل $T_n$ هو التشابه المباشر الذي مركزه $A$ و نسبته $\frac{1}{2^n}$ و $n\frac{\pi}{2}$ زاوية له. يكون التحويل $T_n$ تحاكيا مركزه النقطة $A$ إذا وفقط إذا كان $n\frac{\pi}{2}=k\pi$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ ويكافئ $n=2k$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ وبما أن $n$ عدد طبيعي حيث $n\geq 2$ ، نضع $n=2\alpha$ مع $(\alpha\in\mathbb{N}^*)$

إذن: من أجل $n=2\alpha$ مع $(\alpha\in\mathbb{N}^*)$ يكون $T_n$ تحاكيا مركزه النقطة $A$ نسبته $\frac{1}{2^n}$ أو $-\frac{1}{2^n}$

–إذ كان $\alpha$ عدد طبيعي زوجي غير معدوم ، $\alpha=2\beta$ مع $(\beta\in\mathbb{N}^*)$ أي $n=4\beta$ مع $(\beta\in\mathbb{N}^*)$ فان نسبة التحاكي $T_n$ هي $\left(\frac{1}{16}\right)^\beta$

–إذ كان $\alpha$ عدد طبيعي فردي غير معدوم ، $\alpha=2\beta-1$ مع $(\beta\in\mathbb{N}^*)$ أي $n=4\beta-2$ مع $(\beta\in\mathbb{N}^*)$ فان نسبة التحاكي $T_n$ هي $-4\left(\frac{1}{16}\right)^\beta$

**4.** نعتبر النقطتين $M$ و $N$ صورتي النقطة $B$ بالتحويليين $T_{4k}$ و $T_{4k-2}$ على الترتيب حيث $k\in\mathbb{N}^*$ .

أ – بين أن من أجل كل عدد طبيعي $k$ غير معدوم النقطة $A$ تنتمي إلى $[MN]$ .

لدينا: $M=T_{4k}(B)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{AB}$

و $N=T_{4k-2}(B)$ يكافئ $\overrightarrow{AN}=-4\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{AB}$

ومنه $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{AM}$ إذا االشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعاكسان في الاتجاه ومنه النقطة $A$ تنتمي إلى القطعة $[MN]$

ب –أحسب بدلالة العدد طبيعي $k$ الطول $MN$ .

معناه $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{AB}+4\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{NM}=5\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{AB}$ ومعناه $NM=5\left(\frac{1}{16}\right)^k AB$

أي: $NM=5\left(\frac{1}{16}\right)^k 2\sqrt{5}=10\sqrt{5}\left(\frac{1}{16}\right)^k$

جـ–أحسب $\lim\limits_{k\to+\infty} MN$ .

$$\lim_{k\to+\infty} MN=\lim_{k\to+\infty}10\sqrt{5}\left(\frac{1}{16}\right)^k=0$$

**التمرين الثاني : (4 نقاط )**

**I)** $t$ ، $a$ و $b$ أعداد طبيعية حيث : $1<t\leq a\leq b$ .

عين الأعداد $t$ ، $a$ و $b$ علماً أنه في النظام ذي الأساس $t$ يكون $a+b=\overline{46}$ و $a.b=\overline{545}$ .

$a+b=\overline{46}=4t+6$ و $a.b=\overline{545}=5t^2+4t+5$

$a$ و $b$ هما حلا المعادلة ذات المجهول $x$ التالية:

$(E)\ldots\ldots\ x^2-(4t+6)t+5t^2+4t+5=0$

$\Delta'=(2t+3)^2-(5t^2+4t+5)=-t^2+8t+4$

المعادلة $(E)$ تقبل حلولا إذا فقط إذا كان $-t^2+8t+4\geq 0$

أي: $t\in\left[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}\right]$

بما أن: $t$ عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $(t=7)$ أو $(t=8)$

- إذا كان $(t=7)$ فإن: $\Delta'=11$ ومنه المعادلة $(E)$ ليس لها حل في $\mathbb{N}$ .
- إذا كان $(t=8)$ فإن: $\Delta'=4$ ومنه المعادلة $(E)$ تقبل حلين هما: 17 و 21 .

و بما أن: $a\leq b$ فإن: $a=17$ و $b=21$

وبالتالي: $(t=8)$ و $(a=17)$ و $(b=21)$

**II)** نعتبر المعادلة $(1)$..........$21x-17y=8$ حيث $x$ و $y$ عددين طبيعيين .

**1.** أ - الثنائية $(x_0;y_0)=(2;2)$ حل خاص للمعادلة $(1)$.

ب -حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $(1)$.

$\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17y_0=8\end{cases}$ ومنه: $(*)...21(x-x_0)=17(y-y_0)$

17 يقسم $21(x-x_0)$ و $PGCD(21;17)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص 17 يقسم $(x-x_0)$

أي: $x-x_0=17k$

ومن $(*)$ نحصل على: $21(17k)=17(y-y_0)$

أي: $y-y_0=21k$

إذن: $(x;y)\in\{(17k+2;21k+2)/k\in\mathbb{N}\}$

**2.** أ-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$، باقي القسمة الاقليدية للعدد $9^n$ على 13.

$9^0\equiv1[13]$، $9^1\equiv9[13]$، $9^2\equiv3[13]$، $9^3\equiv1[13]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $k$، $9^{3k+r}\equiv 9^r[13]$ حيث $r\in\{0;1;2\}$

| قيم $n$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ |
|---|---|---|---|
| باقي قسمة $9^n$ على 13. | 1 | 9 | 3 |

ب - الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة $(1)$ معناه $21\alpha-17\beta=8$

و معناه $17\beta=21\alpha-8$

لدينا: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 9^2-1-2[13]$

أي: $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$

**3.** أ - بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(1)$ و $x\equiv0[4]$ فإن $y\equiv0[4]$ .

$(x;y)$ حلا للمعادلة $(1)$ و $17y=21x-8$

$x\equiv0[4]$ معناه : $x=4\lambda$

وعليه : $17y=21(4\lambda)-8=4(21\lambda-2)$

أي: $17y\equiv0[4]$ ولكن $PGCD(4;17)=1$ إذن: $y\equiv0[4]$

ب - عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(1)$ التي يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$ .

$x\equiv0[4]$ معناه : $17k+2\equiv0[4]$ أي: $k\equiv2[4]$

أي: $k=4\delta+2$

إذن: $x=17(4\delta+2)+2=4(17\delta+9)$

و $y=21k+2=21(4\delta+2)+2=4(21\delta+11)$

$p\gcd(x;y)=4$ معناه

$p\gcd(4(17\delta+9);4(21\delta+11))=4$ ومعناه

$4\times p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=4$

أي: $p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=1$

وبما أن: $21(17\delta+9)-17(21\delta+11)=2$ فإن:

$p\gcd(17\delta+9\ ;\ 21\delta+11)=1$ معناه $p\gcd(17\delta+9\ ;2)=1$

و معناه $17\delta+9\equiv1[2]$ أي: $\delta\equiv0[2]$ ( $\delta$ زوجي)

إذن: $x=4(17(2k')+9)=136k'+36$

و $y=4(21(2k')+11)=168k'+44$ ، مع $k'\in\mathbb{N}$

**ط2:** $p\gcd(x;y)=4$ معناه $p\gcd(x\ ;\ 21x-17y)=4$

ومعناه $p\gcd(x\ ;8)=4$

ومنه $x\equiv4[8]$

أي: $17k+2\equiv4[8]$ أي: $k\equiv2[8]$

أي: $k=8k'+2$ مع $k'\in\mathbb{N}$

إذن: $x=17k+2=17(8k'+2)+2=136k'+36$

و $y=21k+2=21(8k'+2)+2=168k'+44$ مع $k'\in\mathbb{N}$

**التمرين الثالث: (4.5 نقاط )**

نعتبر النقطتين $A(3;0;-2)$، $B(3;3;1)$ والمستقيمين $(\Delta)$ الذي يشمل $A$ و $\vec{u}(3;1;-1)$ شعاع توجه له و $(d)$ الذي يشمل $B$ و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجه له.

**1.** تحقّق أنّ المستقيم $(\Delta)$ هو تقاطع المستويين:

$(P_1): x-2y+z-1=0$ و $(P_2): x-y+2z+1=0$

$\overrightarrow{n_1}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P_1)$

و $\overrightarrow{n_2}(1;-1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P_2)$

بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-1}$ فان $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطان خطيا و منه المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم

لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{n_1}=(3)\times(1)+(1)\times(-2)+(1)\times(-1)=0$

و $\vec{u}.\overrightarrow{n_2}=(3)\times(1)+(1)\times(-2)+(1)\times(-1)=0$

بما أن $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}$ و $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$ فان $\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم تقاطع المستويين: $(P_1)$ و $(P_2)$ ومن جهة أخرى لدينا:

$3-2(0)+(-2)-1=0$ و $3-(0)+2(-2)+1=0$ أي أن $A$ نقطة مشتركة بين المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$

إذا المستقيم $(\Delta)$ هو تقاطع المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$

طريقة2: نتحقق أنّ: $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$

**2.** $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية المسافة عن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$.

أ – بيّن أنّ النقطة $I(3;\alpha+2;\alpha)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$ حيث $\alpha$ وسيط حقيقي.

$$d(I,(P_1))=\frac{|3-2(\alpha+2)+\alpha-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-\alpha-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}$$

و
$$d(I,(P_2))=\frac{|3-(\alpha+2)+2\alpha+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}$$

بما أن $d(I,(P_1))=d(I,(P_2))$ فان $I\in(\Gamma)$

ب – بيّن أنّ مجموعة النقط $I$ ، لما تمسح $\alpha$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم $(d)$ .

لدينا : $\overrightarrow{IB}(0;1-\alpha;1-\alpha)$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{IB}=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\vec{v}$

إذا مجموعة النقط $I$ ، لما تمسح $\alpha$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي المستقيم الذي يشمل $B$ و $\vec{v}(0;2;2)$ شعاع توجيه له وهو المستقيم $(d)$

جـ - جد نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ و بين أن النقطة $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\Delta)$.

$I\in(\Delta)$ يكافئ $d(I,(P_1))=d(I,(P_2))=0$ (لأن المستقيم $(\Delta)$ هو تقاطع المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ ) ويكافئ $\frac{|\alpha+2|}{\sqrt{6}}=0$

وهذا يعني $\alpha=-2$ ، إذن $A(3;0;-2)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$.

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=(3)(0)+(1)(2)+(-1)(2)=0$ وهذا يعني أن المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ متعامدان وبالتالي النقطة $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\Delta)$.

د – أ كتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها النقطة $B$ وتمس المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ في النقطتين $C$ و $D$ على الترتيب.

سطح الكرة $(S)$ التي مركزها ا النقطة $B$ وتمس المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ نصف قطرها هو $d(B,(P_1))=d(B,(P_2))=\frac{\sqrt{6}}{2}$

لتكن $M(x;y:z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(S)$ يكافئ $BM=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ومعناه $BM^2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

و يكافئ $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{3}{2}$

هـ– بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي

النقطة $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P_1)$

ومنه الشعاع $\overrightarrow{CB}$ ناظمي للمستوي $(P_1)$

النقطة $D$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P_2)$

ومنه الشعاع $\overrightarrow{DB}$ ناظمي للمستوي $(P_2)$

وبما أن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ غير متوازين فان الشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DB}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط $B$ ، $C$ و $D$ ليست في استقامية فهي تعين مستويا $(BCD)$

لدينا : $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$ إذا $\overrightarrow{DB}\perp\vec{u}$ و $\overrightarrow{CB}\perp\vec{u}$

وهذا يعني أن الشعاع $\vec{u}$ ناظمي للمستوي $(BCD)$

و بما أن النقطة $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(\Delta)$

فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ وهذا معناه $A\in(BCD)$

إذا النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي

–استنتج أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

المثلث $ABC$ قائم في $C$ ($\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$) ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

المثلث $ABD$ قائم في $D$ ($\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BD}$) ومنه النقط $A$ ، $B$ و $D$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

إذا النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ أي سطح الكرة التي مركزها النقطة $E\left(3;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ منتصف $[AB]$ ونصف قطرها $\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ وبما أن النقط

$A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ من نفس المستوي فانها تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $E\left(3;\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**3.** أ – بيّن أنّ المجموعة $(\Gamma)$ هي اتحاد مستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

لتكن $M\left(x;y:z\right)$ نقطة من الفضاء

$M\in(\Gamma)$ يكافئ $d\left(M,(P_1)\right)=d\left(M,(P_2)\right)$ ويكافئ

$$\frac{|x-2y+z-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y+2z+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

ويكافئ $|x-2y+z-1|=|x-y+2z+1|$

ويكافئ
$$\begin{cases} x-2y+z-1=x-y+2z+1 \\ \text{وأ} \\ x-2y+z-1=-x+y-2z-1 \end{cases}$$

ويكافئ $(y+z+2=0)$ أو $(2x-3y+3z=0)$

إذا المجموعة $(\Gamma)$ هي اتحاد مستويين $(Q_1):2x-3y+3z=0$ و $(Q_2):y+z+2=0$

ب– تحقق أنّ المستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متعامدان

$\overrightarrow{n_3}(2;-3;3)$ شعاع ناظمي لـ $(Q_1)$ و $\overrightarrow{n_4}(0;1;1)$ شعاع ناظمي لـ $(Q_2)$

$\overrightarrow{n_3}\perp\overrightarrow{n_4}$ فان المستويين $(Q_1)$ و $(Q_2)$ متعامدان

بما أن $\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{n_4}=(0)(2)+(1)(-3)+(1)(3)=0$

ج – نسمي $d_1$ المسافة بين $C$ والمستوي $(Q_1)$ ، $d_2$ المسافة بين $C$ والمستوي $(Q_2)$ حيث $(Q_1)$ المستوي الذي يشمل المستقيم $(d)$

لتكن النقطة $H_1$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(Q_1)$

و النقطة $H_2$ المسقط العمودي لـ $C$ على المستوي $(Q_2)$

إذن: $d_1=CH_1$ و $d_2=CH_2=AH_1$ ( لأن $(Q_1)\perp(Q_2)$ )

المثلثان $ABC$ و $ACH_1$ قائمان في النقطتين $C$ و $H_1$ على الترتيب ولهما نفس الزاوية $C\widehat{A}B$ ( لأن النقط $A$ ، $B$ و $H_1$ ) وعليه فهما مثلثان متشابهان إذن : $\frac{AH_1}{AC}=\frac{CH_1}{CB}=\frac{AC}{AB}$

$AB=3\sqrt{2}$ ، $CB=\frac{\sqrt{6}}{2}$ و $AB^2=AC^2+CB^2$ أي

$AC=\sqrt{AB^2-CB^2}=\sqrt{\frac{33}{2}}$ إذن: $\frac{d_2}{AC}=\frac{d_1}{CB}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

لدينا: $\frac{d_2}{AC}=\frac{\sqrt{33}}{6}$ ومعناه $d_2=\frac{\sqrt{33}}{6}\times AC=\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{2}}$

أي: $d_2=\frac{11\sqrt{2}}{4}$

$\frac{d_1}{CB}=\frac{\sqrt{33}}{6}$ معناه $d_1=\frac{\sqrt{33}}{6}\times CB=\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}$

أي: $d_1=\frac{\sqrt{22}}{4}$

**التمرين الرابع : (6,5 نقاط )**

**I)** $g$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1. أ – $\lim_{x\to0}g(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

ب ـ اتجاه تغير الدالة $g$ :

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x)=2e^{-x}-1$

$g'(x)=0$ معناه $x=\ln2$ ،

$g'(x)>0$ معناه $x<\ln2$ ، $g'(x)<0$ معناه $x>\ln2$

جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $0$ ↗ | $1-\ln 2$ | ↘ $-\infty$ |

ج–بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $\ln4<\alpha<\ln6$

لدينا : $g(\ln6)\simeq-0,12$ و $g(\ln4)\simeq0,11$

أي $g(\ln4)\times g(\ln6)<0$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة تماما على $[\ln4;\ln6]$ ولدينا $g(\ln4)\times g(\ln6)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\ln4<\alpha<\ln6$

د – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$g(x)=0$ معناه $x=\alpha$ ، $g(x)>0$ معناه $x\in]0;\alpha[$ ،

$g(x)<0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$

**2.** نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ–بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_n<\alpha$

نسمي $P(n)$ الخصية " $1\le u_n<\alpha$ "

• نتحقق من $P(0)$

لدينا : $u_0=1$ و $1\le1<\alpha$ ومنه $1\le u_0<\alpha$ إذن $P(0)$

• نفرض $P(n)$ أي من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_n<\alpha$

ونبرهن على $P(n+1)$ أي من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_{n+1}<\alpha$

نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $[1;\alpha[$ بـ : $h(x)=2\left(1-e^{-x}\right)$

الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $[1;\alpha]$ ولدينا : $h'(x)=2e^{-x}$ ، $h'(x)>0$ فهي دالة متزايدة

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $1\le u_n<\alpha$ معناه $h(1)\le h(u_n)<h(\alpha)$ وهذا يعني

أن: $1\le 2(1-e^{-1})\le u_{n+1}<2(1-e^{-\alpha})$ و بما أن $g(\alpha)=0$

فان: $2(1-e^{-\alpha})=\alpha$ ومنه $1\le u_{n+1}<\alpha$ أي $P(n+1)$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$$1\le u_n<\alpha$$

ب – تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$

ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=2(1-e^{-u_n})-u_n=g(u_n)$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_n<\alpha$ فان: $g(u_n)>0$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ ، المتتالية $(u_n)$ متزايدة

جـ–بين أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما أن المتتالية $(u_n)$ متزايد ومحدودة من الأعلى فهي متتالية متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ معناه $2(1-e^{-\ell})=\ell$ وهذا يعني

$2(1-e^{-\ell})-\ell=0$ أي: $\ell=\alpha$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

**II)** $f$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

**1.** أ– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ فسر النتيجة بيانيا

- من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$f(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=-\frac{1}{x}\times\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ فان $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

ب ـ تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

$f(\alpha)=\dfrac{1-e^\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-e^\alpha}{\alpha}\right)$ ، نعلم أن: $2(1-e^{-\alpha})=\alpha$

أي: $e^\alpha=\dfrac{2}{2-\alpha}$ ، نعوض فنحصل على $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

**2.** الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1-e^x}{x^2}=\frac{-x^2e^x-2x(1-e^x)}{x^4}=\frac{e^xg(x)}{x^3}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

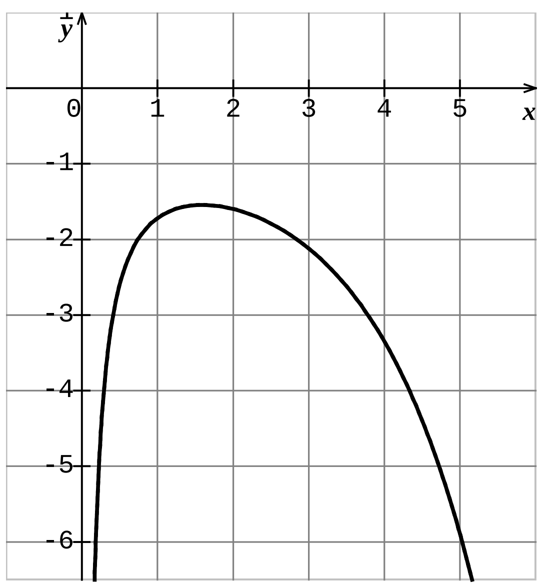
$f'(x)=0$ معناه $x=\alpha$ ، $f'(x)>0$ معناه $x\in]0;\alpha[$

و $f'(x)<0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ $\alpha$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ $0$ $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ $-\infty$ |

**3.** الإنشاء:




**III)** $F$ الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$F(0)=-\ln2$ و من أجل $x>0$ ، $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$

**1.** باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن من أجل $x>0$ ،

$$F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

نضع: $\begin{cases}u(t)=(1-e^t)\\ v'(t)=\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(t)=-e^t\\ v(t)=-\dfrac{1}{t}\end{cases}$

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt=\left[-\frac{1-e^t}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

**2.** بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ،

$$e^x\ln2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{2x}\ln2$$

بما أن: $x \le t \le 2x$ فإن $e^{x} \le e^{t} \le e^{2x}$

وبما أن: $t > 0$ فان $\frac{e^{x}}{t} \le \frac{e^{t}}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$

$\frac{e^{x}}{t} \le \frac{e^{t}}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$ ومعناه $\int_{x}^{2x} \frac{e^{x}}{t}dt \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{2x}}{t}dt$

وهذا يعني أنّ: $e^{x}\int_{x}^{2x} \frac{1}{t}dt \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}\int_{x}^{2x} \frac{1}{t}dt$

ومعناه $e^{x}\left[\ln t\right]_{x}^{2x} \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}\left[\ln t\right]_{x}^{2x}$

أي: $e^{x}\left(\ln 2x - \ln x\right) \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}\left(\ln 2x - \ln x\right)$

ومنه: $e^{x}\ln 2 \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}\ln 2$

**3.** احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة $F$ مستمرة على اليمين في الصفر

بما أنّ : $e^{x}\ln 2 \le \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}\ln 2$

و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^{2x}\ln 2 = \lim_{n \xrightarrow{>} 0} e^{x}\ln 2 = \ln 2$

فإن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt = \ln 2$

لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{t}}{t}dt = \ln 2$ ومنه: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} F(x) = \ln 2 = F(0)$

إذن: الدالة $F$ مستمرة على اليمين في الصفر.

## التصحيح النموذجي لإختبار الباكالوريا التجريبي
## - شعبة الرياضيات -
## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (4 نقاط )**

**I)** من أجل كل $x \in [2;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$

بما أن: $x^2+x+4>0$ و $(x^2+1)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $x(x-1)$ . من أجل كل $x \in [2;+\infty[$ ، $x(x-1)>0$

ومنه من أجل كل $x \in [2;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ وعليه الدالة $f$ متزايدة تماما على $[2;+\infty[$.

**II) 1.** نسمي الخاصية التالية: $p(n)$ : " $2<u_n<3$ "

- نتحقق من $p(0)$ ، لدينا : $u_0=2,5$ و $2<2,5<3$

  أي $2<u_0<3$ إذن: $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $2<u_n<3$ ونبرهن على $p(n+1)$ أي نبرهن أن $2<u_{n+1}<3$

  لدينا : $2<u_n<3$ معناه أن $f(2)<f(u_n)<f(3)$

  لأن $f$ متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ وهذا يعني أنّ:

  $2<u_{n+1}<\dfrac{29}{10}$ ومنه $2<u_{n+1}<3$ أي $p(n+1)$

  ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل عدد طبيعي $n$ :

  $2<u_n<3$

**.2** $u_n^2-\dfrac{9}{10}(u_n^2+1)=\dfrac{u_n^2-9}{10}$

لدينا: $u_n<3$ ومنه $u_n^2<9$ ومنه $u_n^2-9<0$ ومنه $\dfrac{u_n^2-9}{10}<0$

إذن: $u_n^2-\dfrac{9}{10}(u_n^2+1)<0$ ومنه $u_n^2<\dfrac{9}{10}(u_n^2+1)$

**.3** $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2-u_n}{u_n^2+1}$

بما أن $2<u_n<3$ فإن: $-1<2-u_n<0$ و $u_n^2+1>0$

وعليه من أجل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ .

$(u_n)$ متناقصة تماما وهي محدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

**.4** $u_{n+1}-2=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2=\dfrac{u_n^3-2u_n^2}{u_n^2+1}=\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

.5 نسمي الخاصية التالية: $p(n)$ : " $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ "

- نتحقق من $p(0)$ ، لدينا : $u_0-2=0,5$ و $\left(\dfrac{9}{10}\right)^0=1$

إذن: $0<u_0-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^0$ ومنه: $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ونبرهن على $p(n+1)$ أي نبرهن أن $0<u_{n+1}-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}$

لدينا: $u_{n+1}-2=\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

و من $u_n^2<\dfrac{9}{10}(u_n^2+1)$ نستنتج أن $\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}<\dfrac{9}{10}$

ومنه $\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)<\dfrac{9}{10}(u_n-2)$ لأن: $u_n-2>0$

أي: $0<u_{n+1}-2<\dfrac{9}{10}(u_n-2)$

ولدينا: $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ (فرضية التراجع)

وعليه $0<u_{n+1}-2\le\dfrac{9}{10}\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ أي: $0<u_{n+1}-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}$

أي $p(n+1)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

بما أن: $0<u_n-2\le\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n=0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-2=0$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

**التمرين الثاني : (3.5 نقاط )**

$U_1$ يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء

$U_2$ يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء

$U_3$ يحتوي على 3 كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

1. شجرة الاحتمالات .(انظر في آخر التمرين)

$P_{u_1}(RN)=\dfrac{C_1^1\times C_{19}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{19}{190}=\dfrac{1}{10}$ ومنه $P_{u_1}(NN)=\dfrac{9}{10}$

وبنفس الطريقة:

$P_{u_2}(RR)=\dfrac{1}{190}$ ، $P_{u_2}(NR)=\dfrac{36}{190}$ و $P_{u_2}(NN)=\dfrac{153}{190}$

$P_{u_3}(RR)=\dfrac{3}{190}$ ، $P_{u_3}(NR)=\dfrac{51}{190}$ و $P_{u_3}(NN)=\dfrac{136}{190}$

**.2** ليكن $X$ المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ–قيم المتغير العشوائي $X$ هي: 0 ، 1 و2

ب– بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $\dfrac{2}{285}$ .

$$P(X=2)=P(U_2\cap RR)+P(U_3\cap RR)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}=\frac{1}{190}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{285}$$

جـ – بين أن احتمال الحادثة $(X=1)$ يساوي $\frac{53}{285}$.

$$P(X=1)=P(U_1\cap RN)+P(U_2\cap RN)+P(U_3\cap RN)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{19}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{36}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{51}{190}$$
$$=\frac{106}{3\times190}=\frac{53}{285}$$

د – استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

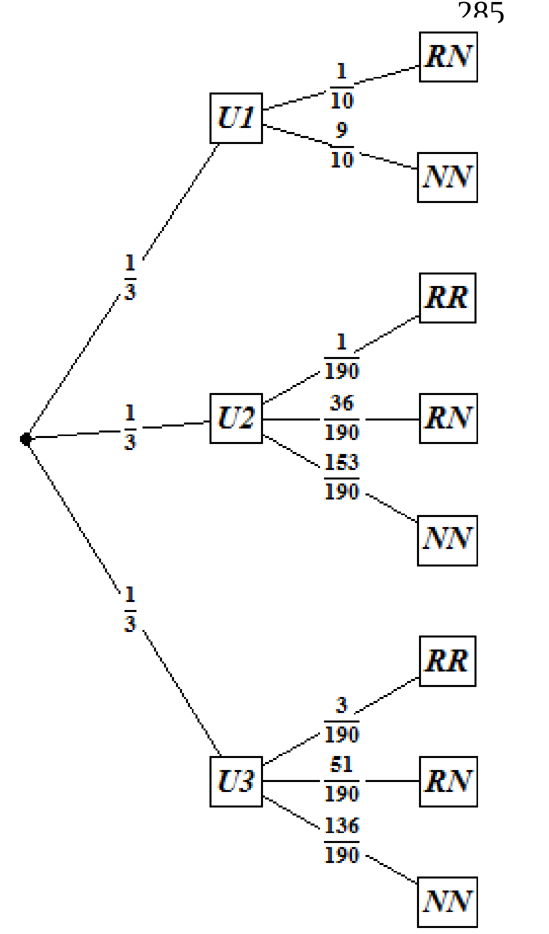
$$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$$
$$=1-\frac{2}{285}-\frac{53}{285}=\frac{230}{285}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{230}{285}$ | $\frac{53}{285}$ | $\frac{2}{285}$ |

$$E(X)=\frac{53}{285}+2\times\frac{2}{285}=\frac{57}{285}=0,2$$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق $U_3$ ؟

$$P_{RR}(U_3)=\frac{P(U_3\cap RR)}{P(RR)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}}{\frac{2}{285}}=\frac{57}{76}$$



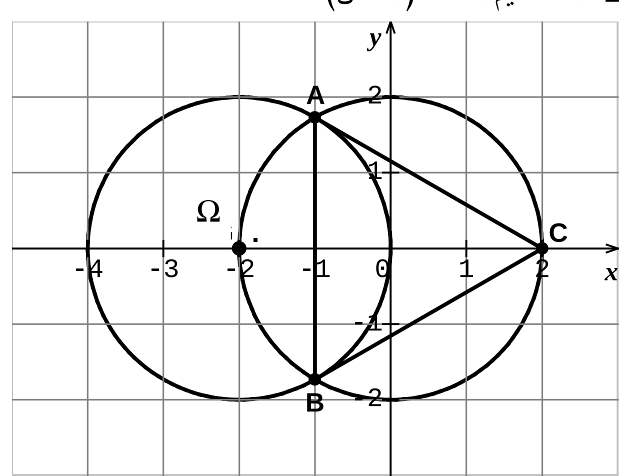

**التمرين الثالث : ( 5,5 نقاط)**

**1.** بوضع $z=x+iy$ ، $z^2=-2-2i\sqrt{3}$

معناه $\begin{cases}x^2-y^2=-2\\2xy=-2\sqrt{3}\\x^2+y^2=4\end{cases}$ ومعناه $(x;y)\in\left\{\left(1;-\sqrt{3}\right);\left(-1;\sqrt{3}\right)\right\}$

إذن للمعادلة المطلوبة حلين هما: $z_1=1-\sqrt{3}i$ و $z_2=-1+\sqrt{3}i$

**2**. أ – تعليم النقط: ( الشكل)




ب – $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع لأن: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{BC}{AC}=1$

و $Arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$.

جـ – لدينا: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0$ ، إذن النقطة $O$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ وهي مركز الدائرة المحيطة به لأنه متقايس الأضلاع ونصف قطرها هو: $r=OA=|z_A|=2$.

**3.** أ – $z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)$ معناه $z+2=2e^{i\theta}$ أي $|z-z_\Omega|=2$ وبالتالي $\Omega M=2$ ، إذن $(\Gamma)$ هي الدائرة ذات المركز $\Omega$ ونصف القطر 2.

ب– $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=2$ و $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=2$.

إذن: $A\in(\Gamma)$ و $B\in(\Gamma)$

**4.** $C$ هي صورة $B$ بالدوران $r(A;\frac{\pi}{3})$ الذي كتابته المركبة: $z'-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)$ ، إذن صورة $\Omega$ بهذا التحويل هي:

$z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_\Omega-z_A)+z_A=0=z_O$ و $O$ مركز $(C)$

ومنه الدائرة $(C)$ هي صورة الدائرة $(\Gamma)$ بالدوران $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$.

**5.** أ – الكتابة المركبة ل $S$ هي: $z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.z = (1-i)z$

ب – $(1-i)z_A = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i = z_D$

ج $z_A = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

إذن: $z_D = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{12}}$

ولكن: $z_D = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$

إذن: $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

و $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**6.** أ – حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $5x - 24y = 14$

$5x - 24y = 14$

معناه $5x = 24y + 14$

ومنه $5x \equiv 14[24]$

ومنه $25x \equiv 70[24]$ أي $x \equiv 22[24]$ ،

إذن: $x = 24k + 22$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$5x - 24y = 14$ معناه $24y = 5(24k+22)-14$

أي: $y = 5k + 4$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وعليه: $(x;y) \in \{(24k+22\ ;\ 5k+4)/k \in \mathbb{Z}\}$

ب – استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ حيث يكون:

$$\arg(z_D)^n = \frac{\pi}{2} + \arg(z_A)$$

$\arg(z_D)^n = \frac{\pi}{2} + \arg(z_A)$ معناه $\frac{5n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ومعناه $5n - 24k = 14$ ومنه $n = 24\lambda + 22$ مع $\lambda \in \mathbb{N}$

**التمرين الرابع: (7 نقاط )**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

**1.** أ – ادرس استمرارية الدالة $f$ عند القيمة $x = 0$ .

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x + 1 = 1$$

بما أن: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$ فإن الدالة $f$ مستمرة عند الصفر من اليمين.

ب – احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)}{x}$$

أي: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{3}{2}x - x\ln x = 0$

إذن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند الصفر من اليمين ، بيانياً المنحني $(C_f)$ يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(0;1)$ معامل توجيهه .معدوم معادلته $y = 1$ .

**2.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

**3.** – الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{1}{2}x\left(\frac{-2}{x}\right) = 2x(1-\ln x)$ .

ب– استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

$f'(x) = 0$ معناه $x = 0$ أو $x = e$

$f'(x) > 0$ معناه $1-\ln x > 0$ و معناه $0 < x < e$

$f'(x) < 0$ معناه $1-\ln x < 0$ و معناه $x > e$

إذن:الدالة $f$ متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $e$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ $\quad$ $0$ $\quad$ $-$ |
| $f(x)$ | $1$ ↗ $f(e)$ ↘ $-\infty$ |

$f(e) = 1 + \frac{1}{2}e^2 \simeq 4,7$

**4.** معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة1

$(\Delta): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ أي: $(\Delta): y = 2x + \frac{1}{2}$

**5.** $g$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ– احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ .

$g'(x) = f'(x) - 2$ و $g''(x) = f''(x) = -2\ln x$

ب – بيّن أنّ الدالة $g'$ تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

$g''(x) = 0$ معناه $\ln x = 0$ و معناه $x = 1$

$g''(x) > 0$ معناه $\ln x < 0$ و معناه $x < 1$

الدالة $g''$ متزايدة تماما على $]0;1[$ ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ وتنعدم من أجل $x=1$ وبالتالي الدالة $g'$ تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1

جـ – استنتج اتجاه تغير الدالة $g$ ، احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

بما أن الدالة $g'$ تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة 1 فإن من اجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $g'(x)\le g'(1)$ أي: $g'(x)\le 0$

وعليه الدالة $g$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

$$g(1)=f(1)-2-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$$

– إذا كان $0<x\le 1$ فإن $g(x)\ge g(1)$ أي: $g(x)\ge 0$

– إذا كان $x\ge 1$ فإن $g(x)\le g(1)$ أي: $g(x)\le 0$

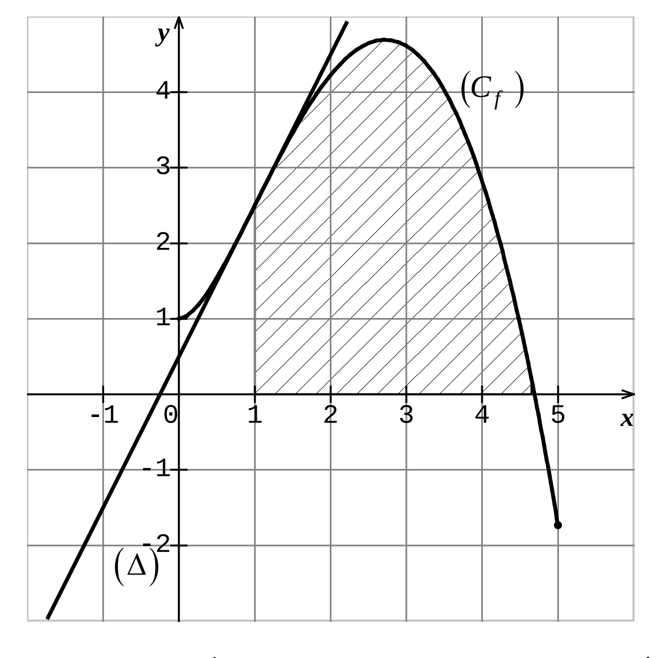
د– استنتج الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$

| $x$ | $-\infty$      $1$      $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $g(x)$ | + | 0   − |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

تفسير النتيجة بيانياً: $(C_f)$ يخترق $(\Delta)$ في النقطة $\Omega\left(1;\frac{5}{2}\right)$ وعليه هذه النقطة هي **نقطة انعطاف** للمنحني $(C_f)$.

**6.** بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يحقق $4,6<\alpha<4,7$ .(تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة)

**7.** رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $[0;5]$ .




**8.** أ – باستعمال المكاملة بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة 1.

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ و التي تنعدم عند القيمة 1 هي الدالة $F$ المعرفة بـ : $F(x)=\int_1^x t^2\ln t\,dt$

نضع: $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=t^2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=\frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

$$F(x)=\int_1^x t^2\ln t\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x-\int_1^x \frac{1}{t}\times\frac{t^3}{3}\ln t\,dt$$

ومنه: $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$

ب – احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\alpha$ و $y=0$ .

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)dx=\int_1^\alpha\left(\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right)dx$$

أي : $A(\alpha)=\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{1}{9}x^3+x\right]_1^\alpha$

أي : $A(\alpha)=\frac{11}{18}\alpha^3-\frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha+\alpha-\frac{29}{18}$

جـ ـ لدينا: $f(\alpha)=0$ معناه $\alpha^2\ln\alpha=\frac{3}{2}\alpha^2+1$

إذن: $A(\alpha)=\frac{11}{18}\alpha^3-\frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{2}\alpha^2+1\right)+\alpha-\frac{29}{18}$

أ ي: $A(\alpha)=\frac{2\alpha^3+12\alpha-29}{18}\,u.a$ .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست ثانويات

تمنراست المقاطعة 29

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي دورة :

مـــــــــاي 2017

شعـــــــبة : الرياضيات

اختبار في مادة الرياضيات

المـــــــدة : 4 ســـــا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

## الموضوع الأول

### التمرين الأول ( 4 نقاط ) :

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$ : بـــــ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n = 2^{n+1} + 1$ هل العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما ؟

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 5

ثم أستنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2017^{1438}$ على 5

3) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$ ثم أستنتج عبارة $v_n$ بدلالة $n$ .

4) عين القيم الممكنة للعدد الطبيعي $PGCD(u_n ; v_n)$

ثم أستنتج قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $PGCD(u_n ; v_n) = 5$

### التمرين الثاني (4 نقاط ) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ نعتبر النقط

$C(-1;0;1); B(-1;0;2) , A(1 ; 1;0)$

و المستوي $(p)$ الذي تمثيله الوسيطي له $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + \beta - 2 \\ z = 3\alpha + \beta + 3 \end{cases}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان

1) تحقق أن النقط $C ; B , A$ ليست في استقامية ثم بين أن $x - 2y + 1 = 0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(p)$ ثم تحقق أن النقطة $C$ من هذا المستوي ..

3) تحقق أن المستويان $(p)$ و $(ABC)$ متعامدان ثم عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما $(\Delta)$ و أحسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$

4) لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(A ; 3); (B ; \lambda); (C ; \lambda^2)\}$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$ فإن $G$ موجودة ثم عين قيمة العدد $\lambda$ حتى تكون النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

التمرين الثالث (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
أكتب الحلول على الشكل المثلثي

2) نعتبر المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتان $A$ ; $B$ ; $C$ التى لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -\sqrt{3} - i$.
عين $z_D$ لاحقة النقطة حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ثم أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة $z_A$ و $z_B$ و $z_C$.

3) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ تخيلي صرف جزئه التخيلي سالب .

4) ليكن التحويل النقطي $S$ الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بالنقطة $M'$ من المستوي ذات اللاحقة $z'$ حيث $z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} + 3i$ عين طبيعة التحويل $S$ مُعينَا عناصره المميزة

5) بين ان المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها ثم عين المجموعة $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $S$ معينا عناصرها المميزة .

التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = -x - 1 + \frac{2e^x}{1+e^x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(-x) + f(x) = 0$ ماذا تستنتج ؟
2) أحسب نهاية الدالة عند $-\infty$ ثم استنتج نهايتها عند $+\infty$ .
3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = -\frac{e^{2x}+1}{(1+e^x)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها
4) أحسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-1)]$ ثم أستنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب تعيين معادلتيهما.
5) أنشئ المنحنى $(C_f)$.
6) $\lambda$ عدد حقيقي سالب تماما نسمي $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها $y = -x - 1$ ; $x = \lambda$ ; $x = 0$ - عبر عن المساحة $S(\lambda)$ بدلالة $\lambda$
7) أحسب $\lim_{x \to -\infty} S(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

التمرين الأول( 4 نقاط ) :

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بــ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4$

1- هل المتتالية حسابية ؟ هندسية ؟ برر إجابتك .

2- لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بـ $\mathbb{N}$ : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

عين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ لكي تكون المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول أحسب في هذه الحالة بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ .

3- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13

ثم أستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $S_{2016}$ على 13 .

4- عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2018^{1438} + 2016^{1437} + 2015^{1436} + 2014^{1435}$ على 13 .

<u>التمرين الثاني (4 نقاط ) :</u>

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(A\,;\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\,)$ $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث $\overrightarrow{AE} = 3\,\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD} = 4\,\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{\imath}$

1- تحقق أن $\overrightarrow{AG} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$ .

ثم عين إحداثيي الشعاعان $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EB}$ .



2- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(EBG)$

3- ليكن $\lambda$ عدد حقيقي يختلف عن 1 و $M(2\,\lambda\,;4\,\lambda;3\,\lambda)$ نقطة من الفضاء تحقق ان $M$ تنتمي إلى المستقيم $(AG)$ باستثناء النقطة $G$ ثم بين أن النقطة $M$ لا تنتمي إلى المستوي $(EBG)$

4- ليكن $V_{MEBG}$ حجم رباعي الوجوه $MEBG$ عبر عن $V$ بدلالة $\lambda$ .

ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $AEBG$

و عين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ التي يكون فيها $V_{MEBG}$ مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

<u>التمرين الثالث (5 نقاط):</u>

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ; $B$ ; $C$; $D$ ذات اللواحق $z_A = 4 - i$ ; $z_B = 4 + i$ ; $z_C = 1 + 2i$ ; $z_D = -i$ على الترتيب .

1) ليكن $S$ التشابه الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $D$

أكتب عبارة التشابه $S$ محددا عناصره المميزة .

2) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

3) استنتج طبيعة المثلث $BCD$ .

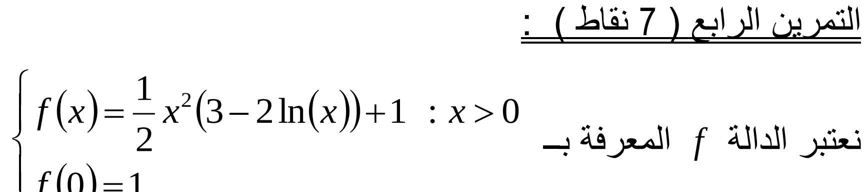
4) بين أن النقط $A$ ; $B$ ; $C$; $D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

5) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث $|2iz+2-9i|=1$

تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ثم عين مجموعة النقط $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة .

<ins>التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :</ins>

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـــ



$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln(x))+1 & : x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

$(C_f)$ منحنياها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1- أدرس إستمرارية و قابلية الاشتقاق الدالة $f$ عند $0$ مُفسرا قابلية الاشتقاق عند $0$ هندسيا .

2- أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.

3- بين أن $f'(x)=2x(1-\ln(x))$ و أستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أكتب المعادلة الديكارتية للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـــ $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أحسب $g'(x)\,;\,g''(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة $g'$ و استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$ .

6- أدرس تغيرات الدالة $g$ ثم أستنتج اشارة $g(x)$

و استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

7- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $4{,}6<\alpha<4{,}7$

ثم أرسم $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

انتهى الموضوع الثاني

## التصحيح المفصل للاختبار التجريبي للبكالوريا

## <ins>الموضوع الأول</ins>

<ins>التمرين الأول ( 4 نقاط ) :</ins>

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$: بـــ $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2u_n-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=2v_n+3 \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n=2^{n+1}+1$

لدينا $u_0=2^1+1=3$ و منه محققة

نفرض أن $u_n=2^{n+1}+1$ و نبرهن أن $u_{n+1}=2^{n+2}+1$

لدينا $u_{n+1}=2u_n-1$ و $u_n=2^{n+1}+1$ نعوض فنجد $u_{n+1}=2(2^{n+1}+1)-1=2^{n+2}+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n=2^{n+1}+1$ .

تبين إن كان العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما لدينا $u_{n+1}=2u_n-1$ هذا يعني أن $-u_{n+1}+2u_n=1$

فحسب نظرية بيزو العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما .

2) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على $5$ حسب قيم العدد الطبيعي

لدينا $2^0 \equiv 1[5]$ و $2^1 \equiv 2[5]$ و $2^2 \equiv 4[5]$ و $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$ و منه برفع الأخيرة إلى قوى $k$
نجد $2^{4k} \equiv 1[5]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ و بالضرب
في 2 نجد $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ و منه
باقي قسمة $2^n$ على 5
لما $n = 4k$ هو 1 و لما $n = 4k+1$ هو 2 و لما $n = 4k+2$ هو 4 و لما $n = 4k+3$ هو 3
.
أستنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2017^{1438}$ على 5 لدينا $1438 = 4 \times 359 + 2$ و هي من الشكل
$n = 4k+2$ و منه باقي قسمة $2017^{1438}$ على 5 هو 4 .

3) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$ لدينا
$2u_0 - v_0 = 2(3) - (1) = 5$ محققة .
نفرض أن $2u_n - v_n = 5$ و لنبرهن أن $2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$
$2u_{n+1} - v_{n+1} = 2[2u_n - 1] - [2v_n + 3] = 4u_n - 2v_n - 5 = 2(2u_n - v_n) - 5 = 10 - 5 = 5$ و منه
$2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$ إذن من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$ .

استنتاج عبارة $v_n$ بدلالة $n$ من ما سبق نجد $v_n = 2u_n - 5 = 2[2^{n+1} + 1] - 5$ أي $v_n = 2^{n+2} - 3$ .

4) تعين القيم الممكنة للعدد الطبيعي $PGCD(u_n ; v_n)$ لدينا $2u_n - v_n = 5$ و منه $PGCD(u_n ; v_n)$ هو قاسم للعدد
5 أي ان القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n ; v_n)$ هي 1 او 5 .

*استنتاج قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $PGCD(u_n ; v_n) = 5$*

$u_n \equiv 0[5]$ ; $v_n \equiv 0[5]$ أي أن $2^{n+1} + 1 \equiv 0[5]$ ; $2^{n+2} - 3 \equiv 0[5]$ يعني أن $2^{n+1} \equiv -1[5]$ ; $2^{n+2} \equiv 3[5]$ أي
$2^{n+1} \equiv 4[5]$ ; $2^{n+2} \equiv 3[5]$ و لدينا $2^{n+1} \equiv 4[5]$ يعني مما سبق نجد أن $n+1 = 4k+2 : k \in \mathbb{N}$ أي
$n = 4k+1 : k \in \mathbb{N}$ بالتعويض في $2^{n+2} \equiv 3[5]$ نجد $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ و هذه محققة و منه من اجل كل عدد
طبيعي $n$ يكتب على الشكل $n = 4k+1$ و $k$ عدد طبيعي .

<u>التمرين الثاني (4 نقاط ) :</u>

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$ نعتبر النقط
$C(-1;0;1)$; $B(-1;0;2)$ , $A(1 ; 1;0)$

و المستوي $(p)$ الذي تمثيله الوسيطي له $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + \beta - 2 \\ z = 3\alpha + \beta + 3 \end{cases}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان

1) التحقق أن النقط $A$ , $B$ ; $C$ ليست في استقامية لدينا $\overrightarrow{AB}(-2 ; -1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2 ; -1;1)$ بما أن
$\frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{2}$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا و منه $A$ , $B$ ; $C$ ليست في استقامية .
اثبات أن $x - 2y + 1 = 0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$ :
لدينا $0 = 1 + (1)2 - (1)$ ومنه $A$ من هذا المستوي و $0 = 1 + (0)2 - (-1)$ ومنه $B$ من هذا المستوي
و $0 = 1 + (0)2 - (-1)$ ومنه $C$ من هذا المستوي و منه محققة .

2) كتابة المعادلة ديكارتية للمستوي $(p)$ : $\begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=\alpha+\beta-2 \\ z=3\alpha+\beta+3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha=x-1 \\ y=\alpha+\beta-2 \\ z=3\alpha+\beta+3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \alpha=x-1 \\ \beta=-x+y+3 \\ z=3\alpha+\beta+3 \end{cases}$ أي

$z=3(x-1)+(-x+y+3)+3$ بعد التبسيط نجد $2x+y-z+3=0$ و هو المطلوب

التحقق أن النقطة $C$ من هذا المستوي نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة الديكارتية للمستوي نجد

$2(-1)+0-1+3=0$ و منه محققة .

3) التحقق أن المستويان$(p)$ و $(ABC)$ متعامدان لدينا الشعاع الناظيمي للمستوي $(p)$ هو $\vec{n}(2\ ;1\ ;-1)$ و الشعاع الناظيمي للمستوي $(ABC)$ هو $\vec{n'}(1\ ;-2\ ;0)$ الجداء السلمي $\vec{n}\,.\,\vec{n'}=2\times1+1\times(-2)+(-1)\times0=0$ و منه المستويان متعامدان .

تعين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما $(\Delta)$ و هو تقاطع المستويان $(ABC)$ و$(p)$ و هو مجموعة النقط $M(x\ ;\ y;\ \ z)$ حيث $\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ بوضع $y=t$ نجد $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=5t+1 \end{cases} :t\in IR$ و هو المطلوب .

حساب المسافة بين النقطة$A$ و المستقيم $(\Delta)$ : لتكن $H(2t-1;\ t\ ;\ 5t+1)$ المسقط العمودي $A$ على $(\Delta)$ و منه $\overrightarrow{AH}$ عمودي على شعاع توجيه المستقيم $(\Delta)$ و $\overrightarrow{AH}(2t-2;t-1;5t+1)$ شعاع توجيهه $\vec{v}(2;1\ ;5)$ ,

نحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}.\vec{v}=4t-4+t-t+25t+5=0$ و منه نجد أن $30t=0$ أي $t=0$ و منه $H\equiv C$

المسافة بين $A$ و$(\Delta)$ هي $AC=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{6}$ .

4) لتكن $G$ مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 3);(B\ ;\lambda);\ (C\ ;\lambda^2)\}$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي

اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$ فإن $G$ موجودة لدينا من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$ : $\lambda^2+\lambda+3\neq0$ لان مميزها $\Delta=-11$ سالب و منه فإن $G$ موجودة .

تعين قيمة العدد $\lambda$ حتى تكون النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ نحسب احداثيات $G$

$G\left(\frac{-\lambda^2-\lambda+3}{\lambda^2+\lambda+3};\frac{3}{\lambda^2+\lambda+3};\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+3}\right)$ تنتمي $(\Delta)$ يعني $\begin{cases} \frac{-\lambda^2-\lambda+3}{\lambda^2+\lambda+3}=2t-1 \\ \frac{3}{\lambda^2+\lambda+3}=t \\ \frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda^2+\lambda+3}=5t+1 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \frac{3}{\lambda^2+\lambda+3}=t \\ \frac{3}{\lambda^2+\lambda+3}=t \\ \frac{\left(\frac{\lambda-3}{5}\right)}{\lambda^2+\lambda+3}=t \end{cases}$

تكون محققة إذا كان $\frac{\lambda-3}{5}=3$ أي أن $\lambda=18$ ......و هو المطلوب

<u>التمرين الثالث (5 نقاط) :</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ نحسب المميز $\Delta=-4$ للمعادلة حلين هما $z_1=\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{3}-i$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي : $z_1=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_1=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

2) نعتبر المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتان $A$ ; $B$ ; $C$ التى لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$.

تعين $z_D$ لاحقة النقطة حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع أي ان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي ان

$z_B-z_A=z_D-z_C$ و منه $z_D=z_B-z_A+z_C=\sqrt{3}-i$ .

الكتابة على الشكل الأسي الأعداد المركبة $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ :

$z_A=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_B=2e^{\frac{-\pi}{6}i}$ و $z_C=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ..

3) تعين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ تخيلي صرف جزئه التخيلي سالب

$\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=e^{\frac{7n\pi}{6}i}=cos\left(\frac{7n\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{7n\pi}{6}\right)$ تخيلي صرف جزئه التخيلي سالب

يعني ان $\begin{cases}cos\left(\frac{7n\pi}{6}\right)=0\\ \text{و}\\ sin\left(\frac{7n\pi}{6}\right)=-1\end{cases}$ أي أن $\frac{7n\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ و $k$ عدد طبيعي بالضرب في 6 نجد

$7n=9+12k$

و منه $7n\equiv 9[12]$ بضرب في 5 نجد $35n\equiv 45[12]$ و $35\equiv -1[12]$ و منه $-n\equiv 9[12]$ أي ان $n\equiv -9[12]$ يكافئ $n\equiv 3[12]$ و منه $n=12k'+3$ و $k'$ عدد طبيعي.

4) ليكن التحويل النقطي $S$ الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بالنقطة $M'$ من المستوي ذات اللاحقة $z'$ حيث $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+3i$ تعين طبيعة التحويل $S$ مُعينَا عناصره المميزة

$S$هو التشابه الذي نسبته$2=|1-i\sqrt{3}|$ و زاويته $arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_0=\frac{-\sqrt{3}+3i}{i\sqrt{3}}=i+\sqrt{3}$ .

5) إثبات ان المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=z_C.\overline{z_C}$ يكافئ أن $|z-z_A|=|z_C|$ أي ان $|z-z_A|=2$ يعني ان $MA=2$ مجموعة النقط $(\Gamma)$ هي الدائرة ذات المركز $A$ و نصف القطر $R=2$

تعين المجموعة $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $S$ معينا عناصرها المميزة : $(\Gamma')$ هي الدائرة ذات المركز $\omega'$ $(S(A)=\omega')$ ذو اللاحقة $z_{\omega'}=S(z_A)=(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)-\sqrt{3}+3i$ أي $z_{\omega'}=\sqrt{3}+i$ و نصف قطرها $R'=4$ ( $R'=2R$ ) ...

<u>التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :</u>

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=-x-1+\frac{2e^x}{1+e^x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(-x)+f(x)=0$ لدينا

$$f(x)+f(-x)=-x-1+\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}+x-1+\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}=-2+\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}+\frac{2}{e^{x}+1}=-2+\frac{2(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=0$$

نستنتج أن $f$ دالة فردية .

2) حساب نهاية الدالة عند $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x-1+\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty$

استنتاج نهايتها عند $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[-f(-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}-f(x)=-\infty$ .

3) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=-\dfrac{e^{2x}+1}{(1+e^{x})^{2}}$ لدينا $f'(x)=-1+\dfrac{2e^{x}(1+e^{x})-2e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}$

أي ان $f'(x)==\dfrac{-1-2e^{x}-e^{2x}+2e^{x}+2e^{2x}-2e^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}$ و منه $f'(x)=\dfrac{-e^{2x}-1}{(1+e^{x})^{2}}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ : $f'(x)=\dfrac{-e^{2x}-1}{(1+e^{x})^{2}}$ سالبة على $\mathbb{R}$ إذن الدالة متناقصة على $\mathbb{R}$

تشكيل جدول تغيراتها

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ ↘ $+\infty$ |

4) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}\right)=0$ و منه $y=-x-1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ جهة $-\infty$ و بما أن الدالة فردية و منه فإن نظير هذا المستقيم المقارب بالنسبة للمبدأ هو مقارب جهة $+\infty$ أي $y=-x+1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ جهة $+\infty$

او بطريقة أخرى $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[-f(-x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[-f(x)-(x-1)]=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=0$ إذن $y=-x+1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ جهة $+\infty$

5) رسم المنحنى $(C_f)$

6) تعبير عن المساحة $S(\lambda)$ بدلالة $\lambda$

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}[f(x)-(-x-1)]dx=\int_{\lambda}^{0}\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

$$S(\lambda)=\left[2\ln(1+e^{x})\right]_{\lambda}^{0}=2\ln\left[\frac{2}{1+e^{\lambda}}\right]$$

$$S(\lambda)=2\ln\left[\frac{2}{1+e^{\lambda}}\right]\ u.a$$

7) حساب $\lim_{x\to-\infty} S(\lambda)=2\lim_{\lambda\to-\infty}\ln\left[\frac{2}{1+e^{\lambda}}\right]=2\ln(2)$

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول( 4 نقاط ) :**

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=3u_n+4n-4$

1) المتتالية ليست حسابية لأن $u_{n+1}-u_n=2u_n+4n-4$ متعلقة بالعدد الطبيعي $n$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3+\frac{4n-4}{u_n}$ متعلقة بالعدد الطبيعي $n$ ليست هندسية .

2) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

تعين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ لكي تكون المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta$ أي ان $v_{n+1}=3u_n+4n-4+\alpha n+\alpha+\beta$ و منه $v_{n+1}=3\left[u_n+\frac{(\alpha+4)}{3}n+\frac{\alpha+\beta-4}{3}\right]$ تكون $(v_n)$ متتالية هندسية يعني أن $\alpha=\frac{\alpha+4}{3}$ و $\beta=\frac{\alpha+\beta-4}{3}$ و منه $\alpha=2$ و $\beta=-1$ تكون $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول

$v_0=u_0+2(0)-1=1$

حساب في هذه الحالة بدلالة $n$ المجموع $S_n$ لدينا $v_n=u_n+2n-1$ و منه

$u_n=-2n+1+v_n$ و منه $S_n=u_0+u_1+u_2+...u_n$ أي

$$S_n=[-2(0)+1+v_0]+[-2(1)+1+v_1]+[-2(2)+1+v_2]+..+[-2n+1+v_n]$$

$$S_n=[1-1-3-...-2n+1]+[v_0+v_1+...+v_n]=\frac{n+1}{2}(-2n+2)+\frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

$$S_n=(-n^2+1)-\frac{(1-3^{n+1})}{2}\ .$$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13 حسب قيم العدد الطبيعي $n$

$3^0\equiv1[13]$ و $3^1\equiv3[13]$ و $3^2\equiv9[13]$ و $3^3\equiv1[13]$ و منه بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13 تشكل متتالية دورية و دورها 3 و منه

لما $n=3k$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 1

و لما $n=3k+1$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 3

و لما $n=3k+2$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 9 .

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $S_{2016}$ على 13 لدينا $S_{2016}=-2016^2+1-\frac{(1-3^{2017})}{2}$ .......(1)

و $2016 \equiv 1[13]$ و منه $2016^2 \equiv 1[13]$ أي $-2016^2 + 1 \equiv 0[13]$ .....(2)

و $2017 \equiv 1 + 3 \times 672$ و هو من الشكل $n = 3k + 1$ و منه $3^{2017} \equiv 3[13]$ و منه $1 - 3^{2017} \equiv -2[13]$

بما أن 2 و 13 أوليان فيما بينهما نجد $\frac{1-3^{2017}}{2} \equiv -1[13]$ ...... (3)

بالتعويض (3) و (2) في (1) نجد $S_{2016} \equiv 1[13]$ و هو المطلوب .

4) تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438}$ على 13

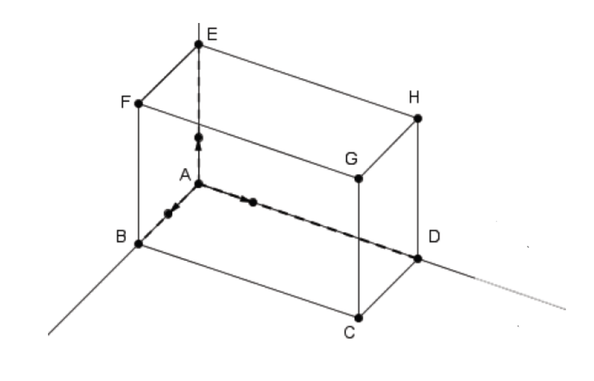
لدينا $2015 \equiv 0[13]$ . و $2014 \equiv -1[13]$ و منه $2015^{1436} \equiv 0[13]$ و $2014^{1435} \equiv -1[13]$

و $2016 \equiv 1[13]$ و منه $2016^{1437} \equiv 1[13]$ و $2018 \equiv 3[13]$ و منه $2018^{1438} \equiv 3^{1438}[13]$ و

$1438 = 3 \times 479 + 1$ هو من الشكل $n = 3k + 1$ و منه $2018^{1438} \equiv 3[13]$ إذن $2018^{1438} \equiv 3[13]$ و

$2014^{1435} \equiv -1[13]$ و $2015^{1436} \equiv 0[13]$ و $2016^{1437} \equiv 1[13]$ بالجمع نجد

$2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438} \equiv 3[13]$ و منه الباقي هو 3 .




التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(A\,;\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

حيث $\overrightarrow{AE} = 3\,\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD} = 4\,\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{\imath}$

1- التحقق أن $\overrightarrow{AG} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$ من الشكل نجد أن

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

بالتعويض نجد $\overrightarrow{AG} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$.

تعين إحداثيي الشعاعان $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = -3\vec{k} + 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath}$ ومنه

$\overrightarrow{EG}(2\,;\,4;\,0)$ و $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -3\,\vec{k} + 2\vec{\imath} = 2\vec{\imath} - 3\,\vec{k}$ . و منه $\overrightarrow{EB}(2\;\;;\;\;0\,;-3)$.

2- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(EBG)$ نفرض أن شعاعه الناظيمي $\vec{n}(a;b;c)$ يعني أن $\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0$ و

$\vec{n}.\overrightarrow{EG} = 0$ أي ان $\begin{cases}2a - 3c = 0\\2a + 4b = 0\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}c = \frac{2a}{3}\\b = -\frac{a}{2}\end{cases}$ نضع $a = 6$ نجد $\begin{cases}c = 4\\b = -3\end{cases}$ و منه معادلة

المستوي $(EBG)$من الشكل $6x - 3y + 4z + d = 0$ نعوض إحداثيات $B(2;0;0)$ نجد $d = -12$

و منه $6x - 3y + 4z - 12 = 0$ هي المعادلة المطلوبة .

3- ليكن $\lambda$ عدد حقيقي يختلف عن 1 و $M(2\,\lambda\,;4\,\lambda;3\,\lambda)$ نقطة من الفضاء

التحقق ان $M$ تنتمي إلى المستقيم $(AG)$ باستثناء النقطة $G$ لدينا $\overrightarrow{AG}(2;4;3)$ و

$\overrightarrow{AM}(2\,\lambda\,;4\,\lambda;3\,\lambda)$ و منه الشعاعان مرتبطان خطيا أي $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AG}$ أي ان $M \in (AG)$ و

لدينا $\lambda \neq 1$ أي ان $\overrightarrow{AG} \neq \overrightarrow{AM}$ أي ان $M$ لا يمكن أن تنطبق على $G$ و منه $M$ تنتمي إلى المستقيم $(AG)$ باستثناء النقطة $G$ .

ا ثبات أن النقطة $M$ لا تنتمي إلى المستوي $(EBG)$ : نعوض الاحداثيات في المعادلة الديكارتية للمستوي نجد

$6(2\lambda)-3(4\lambda)+4(3\lambda)-12=0$ اي ان $12\lambda-12=0$ و منه $\lambda=1$ و هذا تناقض مع الفرض $(\lambda\neq 1)$ إذن $M$ لا تنتمي إلى المستوي $(EBG)$ .

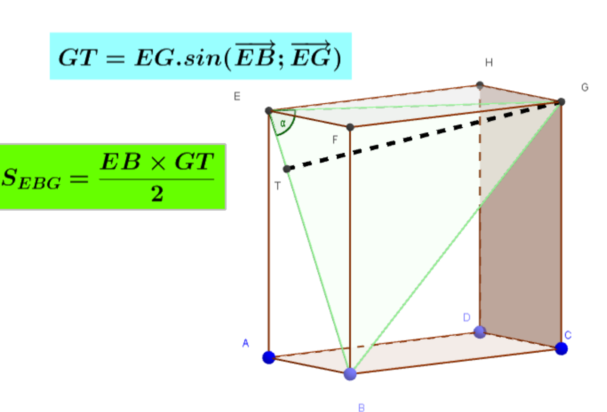
4- ليكن $V_{MEBG}$ حجم رباعي الوجوه $MEBG$

تعبير عن $V_{MEBG}$ بدلالة $\lambda$ لدينا $V_{MEBG}=\frac{S_{EBG}\times d(M;EBG)}{3}$

حيث $d(M;EBG)$ المسافة بين المستوي $(EBG)$ و النقطة $M$ و منه

$d(M;EBG)=\frac{|6(2\lambda)-3(4\lambda)+4(3\lambda)-12|}{\sqrt{36+9+16}}=\frac{|12\lambda-12|}{\sqrt{61}}$ و منه $d(M;EBG)=\frac{|12\lambda-12|}{\sqrt{61}}$ .

$S_{EBG}$ مساحة المثلث EBG




و منه $S_{EBG}=\frac{EB\times EG.sin(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EG})}{2}$ لدينا $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EG}=4$

و $EG=\sqrt{20}$ ; $EB=\sqrt{13}$ و منه

أي ان $EB\times EG=2\sqrt{65}$

أي ان $\cos(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EG})=\frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EG}}{EB\times EG}$

و نعلم أن $\cos(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EG})=\frac{4}{2\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و منه $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ علما ان

$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ و منه

$\sin(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EG})=\sqrt{1-\cos^2(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EG})}=\sqrt{1-\frac{4}{65}}=\sqrt{\frac{61}{65}}$ و منه $S_{EBG}=\frac{2\sqrt{65}.\sqrt{\frac{61}{65}}}{2}=\sqrt{61}$

$V_{MEBG}=\frac{\sqrt{61}\times\frac{|12\lambda-12|}{\sqrt{61}}}{3}=|4\lambda-4|$ ......و هو المطلوب

حساب حجم رباعي الوجوه $AEBG$ : $V_{AEBG}=|4(0)-4|=4$

تعين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ التي يكون فيها $V_{MEBG}$ مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

حجم المتوازي المستطيلات هو $v=AB\times AE\times AD=2\times3\times4=24$ يكون $V_{MEBG}=v$

يعني أن $|4\lambda-4|=24$ يكافئ $\begin{cases}4\lambda-4=24\\ \text{او}\\ 4\lambda-4=-24\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=7\\ \text{او}\\ \lambda=-5\end{cases}$ و هو المطلوب

## التمرين الثالث (5 نقاط):

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ; $B$ ; $C$; $D$ ذات اللواحق $z_A=4-i$ ; $z_B=4+i$ ; $z_C=1+2i$ ; $z_D=-i$ على الترتيب .

1) ليكن $S$ التشابه الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $D$ له عبارة مركبة من الشكل $z'=az+b$

كتابة عبارة التشابه $S$ محددا عناصره المميزة $S(B)=D$ و $S(A)=A$ أي ان

$a=\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-i-4+i}{4+i-4+i}=\dfrac{-4}{2i}=2i$ و $z_A=a\,z_A+b$ و منه $b=z_A-a\,z_A$ أي

$b=4-i-2i(4-i)=2-9i$ و منه العبارة المركبة هي $z'=2i\,z+2-9i$

2) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي :

$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}=\dfrac{-i-1-2i}{4+i-1-2i}=\dfrac{-1-3i}{3-i}=\dfrac{(-1-3i)(3+i)}{10}=\dfrac{-10i}{10}=-i$ بما $\left|\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right|=1$ و

$\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ فإن $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ .

3) استنتاج طبيعة المثلث $BCD$ لدينا $\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أي ان $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ المثلث

$BCD$ قائم في $C$ .

4) إثبات أن النقط $A\,;\,B\,;\,C\,;D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

المثلث $BCD$ قائم في $C$ الدائرة المحيطة بهذا المثلث مركزها منتصف الوتر $I$ ذو لاحقته

$z_0=\dfrac{z_B+z_D}{2}=2$ ونصف قطرها هو $\dfrac{BD}{2}=\sqrt{5}$ نحسب $IA=|4-i-2|=\sqrt{5}$ و منه $A$ تنتمي كذالك

للدائرة المحيطة بالمثلث $BCD$ و منه الدائرة ذات المركز $I$ و نصف القطر $\sqrt{5}$ تشمل النقط $A\,;\,B\,;\,C\,;D$ .

5) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوى ذات اللاحقة $z$ بحيث $|\,2iz+2-9i\,|=1$

التحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ أي ان $|\,2iz_B+2-9i\,|=1$ يعني ان $|\,2i(4+i)+2-9i\,|=1$

بالحساب نجد $|-i\,|=1$ محققة .

تعين مجموعة النقط $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة $|\,2iz+2-9i\,|=1$ يكافئ $|\,2z-2i-9\,||i|=1$ أي ان

$\left|z-i-\dfrac{9}{2}\right|=1$ لتكن النقطة $N$ ذات للاحقة $\dfrac{9}{2}+i$ و $M$ لاحقتها $z$ و منه $\left|z-i-\dfrac{9}{2}\right|=1$

يكافئ $MN=1$ مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز $N$ و نصف القطر 1 .




التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln(x))+1 & : x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

$(C_f)$ منحنياها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\,\vec{j})$

1- دراسة إستمرارية و قابلية الاشتقاق الدالة $f$ عند $0$ :

لدينا $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln(x)+1\right]=1$ لان $\lim_{x\to 0}\left[-x^2\ln(x)\right]=0$ باستخدام التزايد المقارن.و منه $f$ مستمرة عند 0 .

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{3}{2}h-h\ln(h)\right]=0$ و منه $f$ قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو 0 عند 0 و تفسيرها بيانيا ان المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل الفواصل .

2- حساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\left[3-2\ln(x)\right]+1\right]=-\infty$

3- اثبات أن $f'(x)=2x(1-\ln(x))$ نحسب المشتقة $f(x)=\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln(x)+1\right]$ و منه $f'(x)=\left[3x-2x\ln(x)-x\right]=\left[2x-2x\ln(x)\right]=2x\left[1-\ln(x)\right]$ و هو المطلوب .

استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ : إشارة المشتقة من إشارة $(1-\ln(x))$ ينعدم عند $e$ يكون موجب $(1-\ln(x))\geq 0$ يكافئ أن $1-\ln(x)\geq 0$ أي ان $x\leq e$ و منه الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0\ ;\ e]$ و متناقصة على المجال $[e\ ;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيراتها :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{e^2}{2}+1$ | ↘ | $-\infty$ |

4- كتابة المعادلة الديكارتية للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $f'(1)=2(1-\ln(1))=2$ و $f(1)=\frac{5}{2}$ و منه $y=2(x-1)+\frac{5}{2}$ أي $y=2x+\frac{1}{2}$ هي معادلة$(\Delta)$ .

5- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0\ ;+\infty[$ بـــ $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

حساب $g'(x)=f'(x)-2=2\left[x(1-\ln(x))-1\right]$ و منه $g''(x)=f''(x)=2(1-\ln(x))-2=-2\ln(x)$

دراسة تغيرات الدالة $g'$ المشتقة هي $g''(x)=-2\ln(x)$ و هي عكس إشارة $\ln(x)$ و منه متزايدة على المجال $]0\ ;1]$ و متناقصة على المجال $[1\ ;+\infty[$

جدول تغيراتها

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

و منه إشارة $g'(x)$ على المجال $]0\ ;+\infty[$. سالبة لان الدالة$g'$ لها قيمة حدية كبرى هي 0

6- دراسة تغيرات الدالة $g$ ثم أستنتج اشارة $g(x)$ بما أن $g'(x)$ سالبة على $]0;+\infty[$ فإن $g$ متناقصة عى هذا المجال و $g(1)=f(1)-\frac{5}{2}=0$ و منه $g(x)$ إشارتها

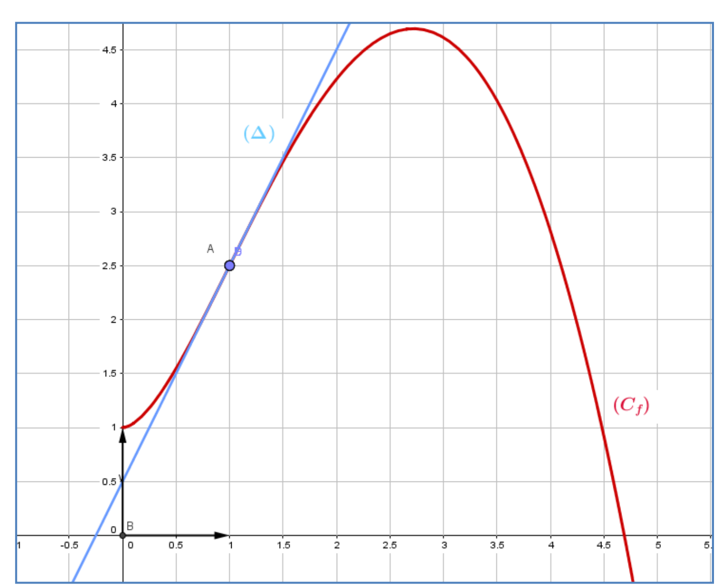
| $x$ | $0$          $1$          $+\infty$ |
|---|---|
| اشارة $g(x)$ | +      $0$      − |

استنتاج الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ و منه $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ على المجال $[0;1]$ و $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ على المجال $[0;+\infty[$ .

7- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $4,6<\alpha<4,7$ نحسب

$f(4,6)=0,45$ ; $f(4,7)=-0,05$ بما انهما مختلفين في الاشارة الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[4,6\ ;\ 4,7]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $4,6<\alpha<4,7$

أرسم $(C_f)$ و $(\Delta)$ .




انتهى الموضوع الثاني

# امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

## الموضوع الأول:

### التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1$، $z_B = 3+4i$، $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و
$z_D = -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$

1) أ) بين ان صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D.

ب) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة $(\Gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

2) لتكن النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\frac{3}{2}$

أ) بين ان لاحقة النقطة F هي $z_F = -2i$.

ب) بين ان F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج) بين ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ ثم اكتبه على الشكل الأســي .

د) استنتج أن المستقيم $(AF)$ هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

هـ) أنشئ النقط A، B، F، C و D.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب $u_2$ ثم تحقق ان $(u_n)$ ليست حسابية و ليست هندسية.

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

- بين ان المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول ثم استنتج عبارة $v_n$ بدلالة n.

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

- بين ان المتتالية $(w_n)$ حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول ثم استنتج عبارة $w_n$ بدلالة n.

4) أ) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

ب) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

ج) احسب، $\lim_{n\to+\infty} u_n$

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$

1) بين ان النقط A ، B و C تحدد مستويا.

2) بين ان : $x+y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

3) لتكن $D(2;0;2)$ و $E(-4;6;2)$ نقطتين من الفضاء . أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(DE)$.

4) لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x(x-2)-y(2-y)+z(z-8)+14=0$

ا) بين ان $(S)$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\Omega$ و نصف قطرها R

ب) بين ان المستقيم $(DE)$ هو مماس لسطح الكرة $(S)$ في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها .

ج) بين ان المستوي $(ABC)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين نصف قطرها و مركزها .

## التمرين الرابع: (07 نقاط )

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\frac{1}{x}-1-2\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.

2. احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : إذا كان $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)=x-x^2\ln x$ و $f(0)=0$.

و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$

1. أ. بين أن الدالة f مستمرة عند 0 على اليمين.

ب. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ ، فسر النتيجة بيانيا.

جـ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=x.g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.7<\alpha<1.8$.

4. ادرس وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$.

5. مثل المنحني $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ .

6. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب $I_\alpha=\int_1^\alpha[x-f(x)]dx$ . فسر هندسيا العدد $I_\alpha$.

ب. تحقق أن $I_\alpha=\left(-\alpha^3+3\alpha^2+1\right)cm^2$

III. نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ: $U_0=\frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=f(U_n)$ .

1. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<U_n<1$ .

2. بين أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما ، استنتج أن $(U_n)$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

# الموضوع الثاني:

## التمرين الاول: (05 نقاط )

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستويين $(P)$ ، $(P')$ معادلة ديكارتية لكل منهما على الترتيب : $x+y+z=0$ و $2x+3y+z-4=0$ .

1) بين أن المستويين $(P)$، $(P')$ يتقاطعان وفق المستقيم $(D)$ تمثيل وسيطي له هو : $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

2) نعتبر العدد الحقيقي $\lambda$ .

ليكن $(P_\lambda)$ حزمة من المستويات المعرفة بـ : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

أ)تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ ، شعاع ناظمي للمستويات $(P_\lambda)$ .

ب) عين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ حتى يكون المستويان $(P)$، $(P_\lambda)$ منطبقين.

جـ) هل توجد قيمة للعدد الحقيقي $\lambda$ ، حتى يكون المستويان $(P)$، $(P_\lambda)$ متعامدين؟

3)بين أن كل المستويات $(P_\lambda)$ ، لها مستقيم مشترك $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

4)أ) بين أن المستويين $(P)$، $(P_{-1})$ متقاطعان وفق مستقيم $(D')$ ، يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

ب) بين أن المستقيمين $(D)$ ، $(D')$ منطبقان.

5) $A(1;1;1)$ نقطة من الفضاء ، احسب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(D)$.

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=1+\sqrt{U_n-1} \end{cases}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<U_n<2$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1}-U_n=\dfrac{-U_n{}^2+3U_n-2}{\sqrt{U_n-1}+U_n-1}$ .

- استنتج أن المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما.

جـ) برر لماذا المتتالية $(U_n)$ متقاربة ؟

2) $(V_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $V_n=\ln(U_n-1)$ .

أ)بين أن المتتالية $(V_n)$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$،يطلب تعيين حدها الأول.

ب) اكتب كلا من $V_n$ ، $U_n$ بدلالة $n$، عين $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $W_n=U_n-1$ .

احسب بدلالة $n$ الجداء $\pi_n$ حيث : $\pi_n=W_0\times W_1\times .....\times W_n$ .

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z+1)^2+\left[2+i\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2=0$

2)نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس ، النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1+2i$ ، $z_B=i\left(2-\sqrt{3}\right)$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$

ا) احسب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم أنشئ النقط A، B و C .

ب) بين ان C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ .

3) أ) عين $z_{C'}$ لاحقة $C'$ نظيرة C بالنسبة الى A .

ب) علما ان الرباعي $BC'B'C$ متوازي اضلاع . بين ان $z_{B'} = -2 + \left(2+\sqrt{3}\right)i$

ج) بين ان $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ ثم أكتبه على شكله الأسي ثم استنتج أن :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

## التمرين الرابع : (07نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4e^{2x} + 17e^{x} - 4$

- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x، $g(x) = -4\left(e^{x} - 4\right)\left(e^{x} - \frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \frac{(4x+9)e^{x} - 4x}{9\left(1 - e^{x}\right)}$ و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^{x}}{1 - e^{x}}$ .

2) عين العددين الحقيقيان a، b بحيث من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{1}{1 - e^{x}}$ .

3) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفهــــا.

4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f'(x) = \frac{g(x)}{9\left(1 - e^{x}\right)^{2}}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتهـــــا

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$ . ماذا تستنتج؟

6) أ)بين ان $(\Delta_1)$و $(\Delta_2)$ مستقيمان مقاربان للمنحنى $(C_f)$ معادلتهماعلى الترتيب: $y = -\frac{4}{9}x - 1$ و $y = -\frac{4}{9}x$

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1)$و $(\Delta_2)$.

7) أنشئ $(\Delta_1)$و $(\Delta_2)$ و $(C_f)$.

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $\frac{e^{x}}{1 - e^{x}} = m$

9) أ) عين مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحددة بالمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta_2)$ و المستقيمين الذي معادلتهما $x = -\ln 4$ و $x = \lambda$ مع $\lambda < -\ln 4$

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$ .

| وزارة التربية الوطنية | 2017/05/18 | مديرية التربية لولاية البويرة |
| --- | --- | --- |
| ثانوية خالص سليمان - بشلول | | المستوى: السنة الثالثة علوم تجريبية |

# التّصْحِيحْ المفصل للبكالوريا التجريبي — الموضوع 01

| تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الاعداد المركبة) | التنقيط |
| --- | --- |

التمرين الاول:

$z_A = 1$ ، $z_B = 3+4i$ ، $z_C = 2\sqrt{3} + i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ و $z_D =$

1) تبيان ان صورة B بالدوران r هي D :

لدينا ، r دوران مركزه A و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و عليه التأكد أن $r(B) = D$

اي $z_D - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A)$

اي $z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

وعليه لدينا،

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+4i-1)+1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+4i)+1$$

$$= -1-2i+\sqrt{3}i-2\sqrt{3}+1$$

$$= -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$$

$$= z_D$$

ب) استنتاج ان النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة $(\Gamma)$:

بما ان صورة النقطة B بواسطة الدوران r الذي مركزه A هي النقطة D فإن النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $\rho = AB = 2\sqrt{3}$

2) أ) تعيين لاحقة النقطة F:

لدينا ، $h(A) = F$ اي $z_F - z_B = \frac{3}{2}(z_A - z_B)$

اي $z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B$

اي $z_F = \frac{3}{2}(1-3-4i)+3+4i$

اي $z_F = -2i$

ب) تبيان ان F منتصف القطعة $[CD]$:

$$\frac{z_D + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{3} + i\left(-2+\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} + i\left(-2-\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{-2i+\sqrt{3}i-2i-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F$$

منه F منتصف القطعة $[CD]$.

ج) تبيان ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ و كتابته على الشكل الاسي:

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i\left(-2-\sqrt{3}\right) + 2i}{1+2i} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{1+2i} = \frac{-\sqrt{3}i\left(2i+1\right)}{1+2i} = -\sqrt{3}i$$

لدينا، $\begin{cases} \left|-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3} \\ Arg\left(-\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ منه: $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

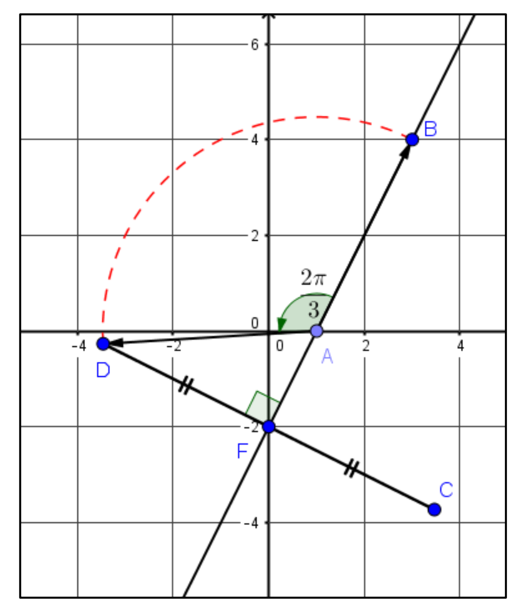
د) استنتاج ان المستقيم $(AF)$ محور القطعة $[CD]$:

بما ان F منتصف القطعة $(CD)$ يكفي التأكد ان $(AF)$ عمودي $(CD)$

مما سبق لدينا ، $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ نجد ان : $\left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ اي $(AF)$ عمودي $(CD)$

منه، المستقيم $(AF)$ محور القطعة $[CD]$

هـ) إنشاء النقط A ، B ، F ، C و D:




| تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية) | التنقيط |
|---|---|

$u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) حساب $u_2$: $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- التحقق أن $(u_n)$ ليست حسابية و ليست هندسية:

$\begin{cases} u_0 + u_2 = \frac{-1}{4} \\ 2u_1 = 1 \end{cases}$ منه $2u_1 \neq u_0 + u_2$ ، الوسط الحسابي غير محقق وعليه $(u_n)$ ليست حسابية

$\begin{cases} u_0 u_2 = \frac{-3}{4} \\ u_1^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ منه $u_1^2 \neq u_0 \times u_2$ ، الوسط الهندسي غير محقق وعليه $(u_n)$ ليست هندسية

2) تبيان ان $(v_n)$ متتالية هندسية :

من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=\frac{1}{2}\left[u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right]=\frac{1}{2}v_n$$

منه $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=1$

- **عبارة $v_n$ بدلالة n:** من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$

3) **تبيان أن المتتالية $(w_n)$ حسابية:**

من اجل كل عدد طبيعي n، $w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=\frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n}+\frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{u_n}{v_n}=2+w_n$

إذن $(w_n)$ متتالية حسابية اساسها $r=2$ و حدها الاول $w_0=\frac{u_0}{v_0}=-1$

- من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n=w_0+nr=-1+2n$

4) أ) **برهان انه ،** $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$:

من اجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\frac{u_n}{v_n}$ منه $u_n=w_nv_n$ إذن $w_n=(-1+2n)\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{2n-1}{2^n}$

ب) **برهان أن،** $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$:

لدينا، $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ و $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ اي $u_n=4(u_{n+1}-u_{n+2})$

و عليه: $S_n=4[(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4)+...+(u_{n+1}-u_{n+2})]$

$S_n=4[u_1-u_2+u_2-u_3+u_3-u_4+...+u_{n+1}-u_{n+2}]$

منه $S_n=4[u_1-u_{n+2}]$

$$S_n=4\left[\frac{1}{2}-\frac{2(n+2)-1}{2^{n+2}}\right]=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

- **حساب** $\lim u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

| تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط) (الهندسة الفضائية) | التنقيط |
|---|---|

1) **تبيان ان النقط A،B و C تحدد مستوي:**

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$ ونلاحظ ان $\frac{0}{-3}\neq\frac{-1}{-4}\neq\frac{1}{1}$ منه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة و عليه فإنها تحدد مستوي

2) **تبيان أن $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية لـ** $(ABC)$:

$$\begin{cases}x_A+y_A-z_A=1+2-3=0\\x_B+y_B-z_B=2+1-3=0\\x_C+y_C-z_C=2-2-0=0\end{cases}$$

منه احداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x+y-z=0$

و عليه $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية لـ $(ABC)$

3) التمثيل الوسيطي للمستقيم $(DE)$:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم $(DE)$ منه $\overrightarrow{DM}=t\times\overrightarrow{DE}\quad /t\in\mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$ شعاع توجيه المستقيم $(DE)$




منه: $\begin{cases}x=2-6t\\y=6t\\z=2\end{cases}\quad /t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $(DE)$.

4) أ) تبيان ان $(S)$ سطح الكرة:

$(S)$ تكافئ $x(x-2)-y(2-y)+z(z-8)+14=0$

تكافئ $x^2-2x-2y+y^2+z^2-8z+14=0$

تكافئ $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+14=0$

تكافئ $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4$

منه $(S)$ هي سطح كرة مركزهـــا $\Omega(1;1;4)$ ونصف قطرهــــا $r=2$.

ب) تبيان ان $(DE)$ مماس سطح الكرة $(S)$ في نقطة $H$ يطلب تعيينهـــا:

لتكن $H(x;y;z)$ تحقق $\begin{cases}H\in(DE)\\H\in(S)\end{cases}$، منه: $\begin{cases}x=2-6t\\y=6t\\z=2\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4\end{cases}$

منه نجد: $(1-6t)^2+(6t-1)^2+4=4$ اي $(1-6t)^2+(6t-1)^2=0$ اي $6t-1=0$ اي

$t=\frac{1}{6}$ منه، $H(1;1;4)$

نلاحظ ان : $d[\Omega;(DE)]=\Omega H=2$ منه ان $(DE)$ مماس سطح الكرة $(S)$ في النقطة $H$

ج) اثبات ان المستوي $(ABC)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة يطلب تحديدهـــا:

لدينا، $d[\Omega;(ABC)]=\frac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{3}}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

نلاحظ ان $d[\Omega;(ABC)]<2$ منه المستوي $(ABC)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(c)$ مركزها $\omega$ و نصف قطرهـا $r'$.

تعيين $r'$: لدينا، $r'=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

تعيين $\omega$: $\omega$ هي المسقط العمودي لـ $\Omega$ على $(ABC)$

| تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدوال العددية) | التنقيط |
|---|---|

الجزء1:

1) دراسة تغيرات الدالة $g$:

النهايات: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1-2\ln x\right]=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{1}{x}-1-2\ln x\right]=+\infty$

اتجاه التغير: من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$، $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right]$

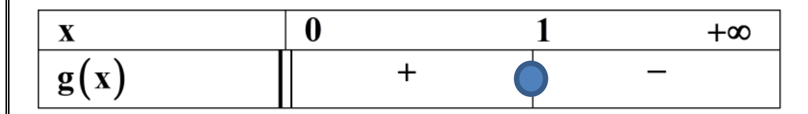
نلاحظ ان ، $g'(x)<0$ على المجال $]0;+\infty[$ . اذن g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g:

| x | 0          $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ $-$ |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ ↘ $-\infty$ |

2) حساب $g(1)$: $\quad g(1)=0$

منه اشارة $g(x)$ نلخصها كما يلي :



| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | + | 0 | $-$ | |

**الجزء الثاني :**

1)أ) تبيان ان f مستمرة عند 0 من اليمين:

لدينا ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-x^2\ln x\right)=0=f(0)$ لان $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2\ln x=0$

اذن f مستمرة عند 0 من اليمين.

ب) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x-x^2\ln x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x(1-x\ln x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}1-x\ln x=1$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق $f'_d(0)=1$

ج) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x\ln x)=-\infty$

2) تبيان ان من اجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=x.g(x)$:

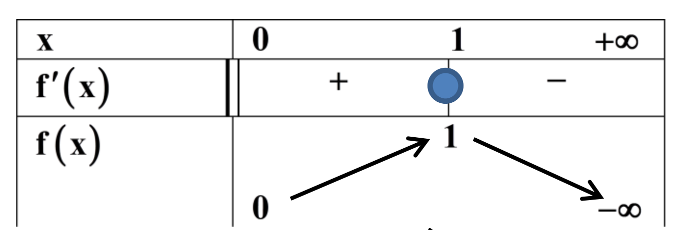
من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=1-\left[2x\ln x+\frac{1}{x}.x^2\right]=1-2x\ln x-x=x\left(\frac{1}{x}-x-2\ln x\right)=xg(x)$$

**اتجاه تغير الدالة f:** اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

منه: f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات :



| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

3) تبيان ان $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,7<\alpha<1,8$:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[1,7\ ;\ 1,8]$ و لدينا ، $f(1,7)=$ $\qquad f(1,8)=$

بما ان $f(1,7)\times f(1,8)<0$ و عليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,7<\alpha<1,8$.

4) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$:

ندرس اشارة الفرق : $\quad f(x)-x=-x^2\ln x$ يكفي دراسة اشارة $-\ln x$

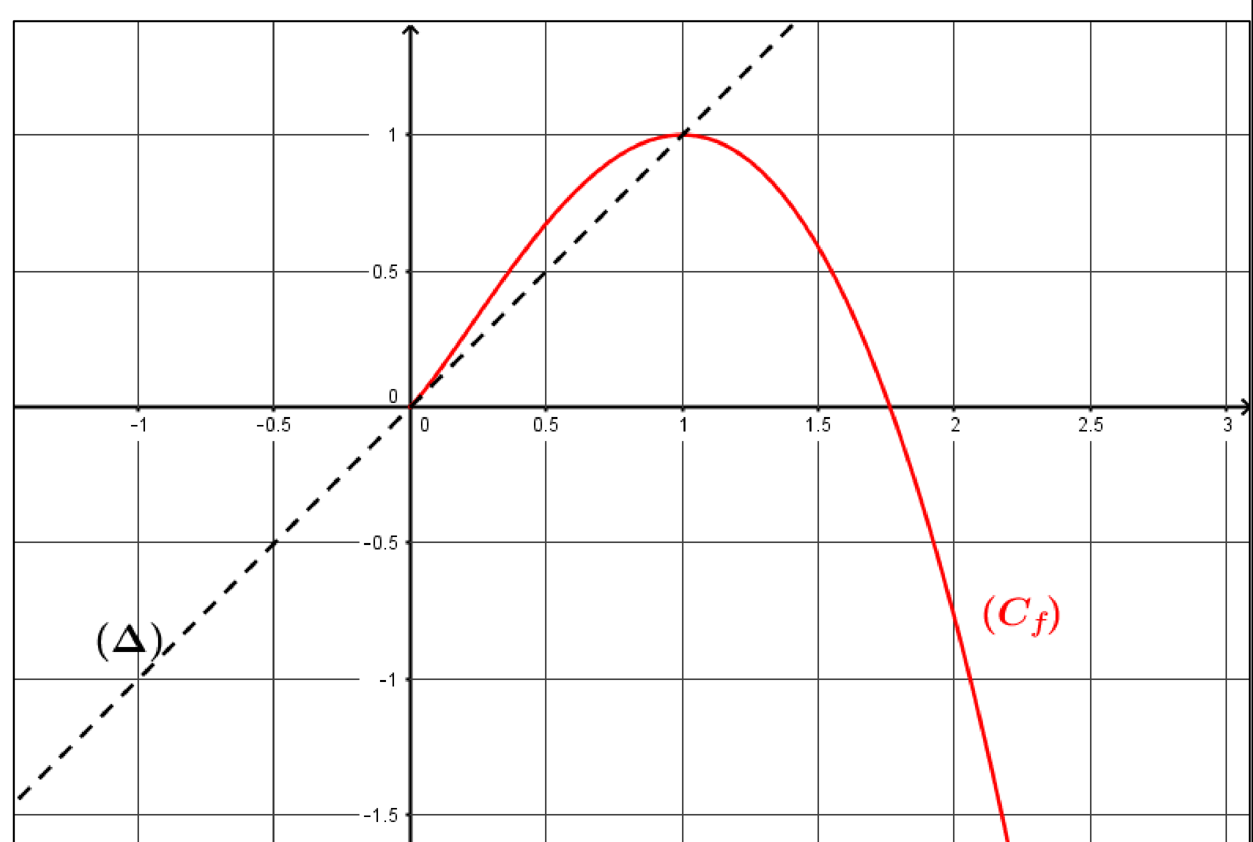
| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\ln x$ | ‖ | + | 0 | $-$ | |

$(C_f)$ يقع تحت $(D)$ على $]1;+\infty[$

$(C_f)$ يقع فوق $(D)$ على $]0;1[$

$(C_f)$ يقطع $(D)$ في النقطة $A(1;1)$.




**5) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة ، حساب** $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x))dx$ :

لدينا ، $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x))dx = \int_1^\alpha (x^2 \ln x)dx$

بوضع: $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$ منه:

$$I_\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^\alpha - \frac{1}{3}\int_1^\alpha x^2 dx = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^\alpha = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\ u.a$$

**التفسير الهندسي:**

$I_\alpha$ هي مساحة الحيز المحددة بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات ذي المعادلة $y = x$ ، $x = 1$ و $x = \alpha$

**ب) التحقق ان** $I_\alpha = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1)cm^2$ :

لدينا، $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 9cm^2$ و $f(\alpha) = 0$ اي $\alpha - \alpha^2 \ln\alpha = 0$ اي $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ منه

$$I_\alpha = \frac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\ u.a = \left[\frac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 1)\right] 9cm^2 = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1)cm^2$$

**الجزء الثالث:** $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

**1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ،** $0 < u_n < 1$ :

نضع ، $P(n):\ 0 < u_n < 1$

المرحلة01: من اجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ وبما ان $0<\frac{1}{2}<1$ فان $P(0)$ محققة

المرحلة02: من اجل $n$ عدد طبيعي كيفي، نفرض صحة $P(n): 0<u_n<1$

ونبرهن صحة $P(n+1): 0<u_{n+1}<1$

لدينا من فرضية التراجع، $0<u_n<1$ وبما ان $f$ دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1[$، نجد

$f(0)<f(u_n)<f(1)$ اي $0<u_{n+1}<1$

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي $n$، $0<u_n<1$.

**2) برهان ان $(u_n)$ متزايدة تماما :**

ندرس اشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n=-u_n^2\ln u_n$

لدينا، $0<u_n<1$ نجد: $\begin{cases}-u_n^2<0\\ \ln u_n<0\end{cases}$ منه، $-u_n^2\ln u_n>0$ اي $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه $(u_n)$ متتالية متزايدة تماما .

**الاستنتاج:** بما ان $(u_n)$ متتالية متزايدة تماما و محدودة من الاعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

**حساب نهايتها:**

لتكن، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ و عليه نجد كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$

بما ان، $u_{n+1}=u_n-u_n^2\ln u_n$ نجد $\ell=\ell-\ell^2\ln\ell$ اي $-\ell^2\ln\ell=0$ اي $\begin{cases}\ell^2=0\\ \ln\ell=0\end{cases}$ اي $\begin{cases}\ell=0\\ \ell=1\end{cases}$

بما ان $u_0=\frac{1}{2}$ و $(u_n)$ متزايدة نجد، $\ell=1$.

Abdelmalek

00000 0000000000000000---

بالتوفيق في البكالوريا إن شاء الله

# التّصحِيحْ المفصل للبكالوريا التجريبي — الموضوع 02

## تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الهندسة الفضائية) — التنقيط

1) **تبيان أن المستويين $(P)$ و $(P')$ يتقطعان وفق المستقيم $(D)$:**

لدينا، $(-4-2t)+(4+t)+(t)=-4+4-2t+2t=0$ منه ، $(D)\subset(P)$

$2(-4-2t)+3(4+t)+t-4=-8+4t+12+3t+t-4=0$ منه $(D)\subset(P')$

اذن، المستويين $(P)$ و $(P')$ يتقطعان وفق المستقيم $(D)$ تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

2) أ) **التأكد ان الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ شعاع ناظمي لـلمستويات $(P_\lambda)$:**

لدينا، $(P_\lambda)$ تكافئ $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

تكافئ $x+y+z-\lambda x-\lambda y-\lambda z+2\lambda x+3\lambda y+\lambda z-4\lambda=0$

تكافئ $(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda=0$

و من خلال المعادلة الديكارتية الاخيرة نستنتج ان الشعاع $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ ناظمي لـ $(P_\lambda)$.

ب) **تعيين قيمة $\lambda$ حتى يكون المستويان $(P)$ و $(P_\lambda)$ منطبقين:**

لدينا، $\vec{n}_{(P)}(1;1;1)$ و $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ اشعة ناظمية لـ $(P)$ و $(P_\lambda)$ على الترتيب .

$(P)$ و $(P_\lambda)$ منطبقين ، اول الشروط الشعاعين $\vec{n}_{(P)}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا

اي $\frac{1}{1}=\frac{1+2\lambda}{1}=\frac{1+\lambda}{1}$ منه نجد ان $\lambda=2\lambda$ اي $\lambda=0$ وعليه، $(P_0)=(P)$.

ج) **البحث عن قيمة لـ $\lambda$ بحيث $(P)$ و $(P_\lambda)$ متعامدين:**

$(P)$ و $(P_\lambda)$ متعامدين معناه ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$ اي $(1+\lambda)+(1+2\lambda)+1=0$ اي $\lambda=-1$

3) **تبيان ان جميع المستويات $(P_\lambda)$ تشمل مستقيم مشترك $(\Delta)$:**

لدينا ، $(P_\lambda)$ تكافئ $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$

يكافئ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \text{و} \\ 2x+3y+z-4=0 \end{cases}$ ومنه حل الجملة هو تقاطع المستويين $(P)$ و $(P')$

و عليه حسب السؤال 1 نجد: $(\Delta)=(D)$.

اذن جميع المستويات $(P_\lambda)$ تشمل مستقيم مشترك هو $(\Delta)=(D)$.

4) أ) **تبيان أن $(P)$ و $(P_{-1})$ متقاطعان وفق مستقيم $(D')$:**

لدينا، $\vec{n}_0(1;1;1)$ و $\vec{n}_{-1}(0;-1;1)$ اشعة ناظمية لـ $(P)$ و $(P_{-1})$

نلاحظ $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{1}$ منه الشعاعين $\vec{n}_0$ و $\vec{n}_{-1}$ غير مرتبطان خطيا و عليه المستويان $(P)$ و $(P_{-1})$

متقاطعان وفق المستقيم $(D')$ الذي يحقق: $\begin{cases} x+y+z=0 & ...(1) \\ -y+z+4=0 & ...(2) \end{cases}$

من $(2)$ نجد، $z=y-4$ ومن $(1)$ نجد، $x+y+y-4=0$ اي $x=-2y+4$

بوضع، $y=\alpha$ نجد: $\alpha\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=4-2\alpha\\ y=\alpha\\ z=-4+\alpha\end{cases}$ تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.

**ب) تبيان ان $(D)$ و $(D')$ منطبقان:**

لدينا، المستقيمين $(D)$ و $(D')$ لهما نفس شعاع التوجيه، $\vec{u}(-2;1;1)$ و عليه فإنهما متوازيين .

لتكن النقطة $A(-4;4;1)$ من المستقيم $(D)$ و نلاحظ ان أجل $\alpha=0$ فإن $A\in(D')$

إذن المستقمين $(D)$ و $(D')$ منطبقان.

**ج) $A(1;1;1)$، حساب المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(D)$:**

لدينا المستويين $(P)$ و $(P_{-1})$ متقاطعان وفق مستقيم $(D)$ و متعامدين منه تستنتج ما يلي :

$$d[A;(D)]^2=d[A;(P)]^2+d[A,(P_{-1})]^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=3+\frac{16}{2}=11$$

منه: $d[A;(D)]=\sqrt{11}$.

| تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية) | التنقيط |
|---|---|

**1) أ) البرهان بالتراجع أن، $1<u_n<2$:**

نضع ، $P(n):1<u_n<2$

المرحلة01: من اجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ وبما ان $1<\frac{3}{2}<2$ فان $P(0)$ محققة

المرحلة02: من اجل $n$ عدد طبيعي كيفي ، نفرض صحة $P(n):0<u_n<1$

ونبرهن صحة $P(n+1):0<u_{n+1}<1$

لدينا من فرضية التراجع، $1<u_n<2$ منه $0<u_n-1<1$ منه $0<\sqrt{u_n-1}<1$

منه $1<1+\sqrt{u_n-1}<2$ اي $1<u_{n+1}<2$

**الخلاصة:** من اجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.

**ب) تبيان ان من اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$:**

لدينا من اجل كل عدد طبيعي $n$،

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$$

$$=\frac{\left[\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right]\left[\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right]}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

$$=\frac{(u_n-1)-(u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

$$=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

**- استنتاج ان $(u_n)$ متزايدة تماما:**

لدينا، $-u_n^2+3u_n-2=(u_n-2)(1-u_n)$

بما ان $1<u_n<2$ نجد، $-1<u_n-2<0$ و $-1<1-u_n<0$ منه نجد، $(u_n-2)(1-u_n)>0$

من جهة اخرى ، $1 < u_n - 1 < 0$ اي $\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1) > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه $(u_n)$ متتالية متزايدة تماما .

ج) **التبرير ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة:**

لدينا ، $(u_n)$متتالية متزايدة تماما و محدودة من الاعلى بالعدد 2 ، إذن فهي متقاربة .

2) أ) **تبيان ان $(v_n)$ هندسية:**

من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{u_n - 1}\right) = \frac{1}{2}\ln(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$$

منه $(v_n)$ متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

ب) **كتابة $v_n$ و $u_n$ بدلالة n:**

من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n = v_0 q^n = -\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{\ln 2}{2^n}$

لدينا، $v_n = \ln(u_n - 1)$ منه ، $u_n - 1 = e^{v_n}$ اي $u_n = e^{v_n} + 1$ منه : $u_n = e^{-\frac{\ln 2}{2^n}} + 1$

**تعيين** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln 2}{2^n}} + 1 = 1 + 1 = 2$ لان : $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln 2}{2^n} = 0\right)$

3) $w_n = u_n - 1$ ، حساب الجداء $\pi_n$:

$$\pi_n = w_0 \times w_1 \times \ldots \times w_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1)\ldots(u_n - 1) = e^{v_0}e^{v_1}\ldots e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}$$

حساب $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$:

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\ln 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2\ln 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

| تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط) (الاعداد المركبة ) | التنقيط |
|---|---|

1) **حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$**، $(z+1)^2 + \left[2 + i(1 + \sqrt{5})\right]^2 = 0$:

$(z+1)^2 + \left[2 + i(1 + \sqrt{5})\right]^2 = 0$ تكافئ $(z+1)^2 = -\left[2 + i(1 + \sqrt{5})\right]^2$

تكافئ $(z+1)^2 = \left[i\left(2 + i(1 + \sqrt{5})\right)\right]^2$

تكافئ $\begin{cases} z + 1 = i\left(2 + i(1 + \sqrt{5})\right) \\ z + 1 = -i\left(2 + i(1 + \sqrt{5})\right) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = -(2 + \sqrt{5}) + 2i \\ z = \sqrt{5} - 2i \end{cases}$

2) أ) **حساب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم انشاء النقط A، B و C:**

$|z_C| = |\sqrt{5}+2i| = \sqrt{9} = 3$ ، منه C تنتمي الى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 3

$|z_B - z_A| = |2i - \sqrt{3}i + 1 - 2i| = |1-\sqrt{3}i| = 2$ ، منه B تنتمي الى الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2

**ب) تبيان أن C هي صورة B بالتشابه المباشر** $S\left(A;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{\pi}{3}\right)$ :

معناه، $S(B) = C$ تكافئ $z_C - z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

يكافئ $z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

لدينا،

$$z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i\sqrt{3}) - 1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) + -1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{4}}(\cancel{4}) + -1 + 2i$$

$$= \sqrt{5} + 2i$$

$$= z_C$$

3) **أ) تعيين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة C بالنسبة الى A :**

C' نظيرة C بالنسبة الى A معناه ، $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$

اي $z_{C'} - z_A = -(z_C - z_A)$

منه $z_{C'} = -z_C + 2z_A$

منه $z_{C'} = -\sqrt{5} - 2i - 2 + 4i$

اذن ، $z_{C'} = -(2+\sqrt{5}) + 2i$

**ب) حساب $z_{B'}$ :**

الرباعي $BC'B'C$ معناه $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$

معناه $z_{C'} - z_B = z_{B'} - z_C$

معناه $z_{B'} = z_{C'} - z_B + z_C$

معناه $z_{B'} = -2 - \sqrt{5} + 2i - 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{5} + 2i$

منه، $z_{B'} = -2 + i(2+\sqrt{3})$

**ج) تبيان أن،** $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})$ :

$$\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2+2i+\sqrt{3}i-\sqrt{5}-2i}{2i-\sqrt{3}i-\sqrt{5}-2i} = \frac{2+(\sqrt{5}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)} = \frac{\left[2+(\sqrt{5}-\sqrt{3}i)\right]\left[\sqrt{5}-\sqrt{3}i\right]}{8}$$

لدينا، $= \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}i+5-3-2\sqrt{15}i}{8}$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{3}i)}{4}$$

كتابته على الشكل الاسي:

$$\begin{cases}\left|\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right|\left|1-i\sqrt{3}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\times 2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \arg\left(\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg\left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]=\arg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)+\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

منه، $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$

**الاستنتاج:**

$\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ نستنتج: $\begin{cases}\left|\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \arg\left(\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}\right)=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ منه $\begin{cases}\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CB'}\right)=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$.

من جهة اخرى: C هي صورة B بالتشابه المباشر $S\left(A;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{\pi}{3}\right)$ معناه

$z_C-z_A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$ اي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ منه $\begin{cases}\frac{AC}{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(B;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

ومنه نجد: $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)$ احظ $\left(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB}\right)=-\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CB'}\right)$

**الانشـــــاء:**

| تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) | (الدوال العددية) | التنقيط |
|---|---|---|

**الجزء الاول:**

من اجل كل عدد حقيقي x، (0,25)

$$-4\left(e^x-4\right)\left(e^x-\frac{1}{4}\right)=\left(e^x-4\right)\left(-4e^x+1\right)=-4e^{2x}+e^x+16e^x-4=-4e^{2x}+17e^x-4=g(x)$$

إشارة $g(x)$ نلخصها في الجدول التالي: (0,25)

$e^x-4\geq 0$ يكافئ $e^x\geq 4$ يكافئ $e^x\geq \ln 4$

$e^x-\frac{1}{4}\geq 0$ يكافئ $e^x\geq\frac{1}{4}$ يكافئ $e^x\geq -\ln 4$

| $x$ | $0$ | $-\ln 4$ | | $\ln 4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-4$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $e^x-\frac{1}{4}$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

**الجزء الثاني:** نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{(4x+9)e^x-4x}{9(1-e^x)}$ — 0,5

**1) تبيان ان :** $f(x)=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{1-e^x}$: — 0,25

من اجل كل عدد حقيقي x ،

$$-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{-4x(1-e^x)+9e^x}{9(1-e^x)}=\frac{-4x+4xe^x+9e^x}{9(1-e^x)}=\frac{(4x+9)e^x-4x}{9(1-e^x)}=f(x)$$

0,25

**2) تعيين العددين الحقيقين a و b:**

من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $ax+b+\dfrac{1}{1-e^x}=ax+\dfrac{b(1-e^x)+1}{1-e^x}=ax+\dfrac{-be^x+b+1}{1-e^x}$

من جهة اخرى ، لدينا: $f(x)=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{1-e^x}$ . بالمطابقة نجد: $a=-\dfrac{4}{9}$ و $b=-1$

منه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x)=-\dfrac{9}{4}x-1+\dfrac{1}{1-e^x}$ — 0,25

**3) حساب نهايات الدالة f:** — 0,25

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{9}{4}x-1+\frac{1}{1-e^x}\right]=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{9}{4}x-1+\frac{1}{1-e^x}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-e^x$ | + | 0 | − |

**4) أ) حساب $f'(x)$:** — 0,25

من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،

$$f'(x)=-\frac{4}{9}+\frac{e^x}{(1-e^x)^2}=\frac{-4(1-e^x)^2+9e^x}{9(1-e^x)^2}=\frac{-4(1-2e^x+e^{2x})+9e^x}{9(1-e^x)^2}=\frac{-4e^{2x}+17e^x-4}{9(1-e^x)^2}=\frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$$

0,25

**ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:**

نلاحظ ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ و عليه:

f دالة متزايدة تماما على المجالين $[-\ln 4;0[$ و $]0;\ln 4]$

f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 4]$ و $[\ln 4;+\infty[$ — 0,25

**جدول تغيرات الدالة f:**

| x | $-\infty$ | $-\ln 4$ | | 0 | | $\ln 4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | ‖ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(-\ln 4)$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $f(\ln 4)$ | ↘ $+\infty$ |

0,25

**5) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،** $f(-x)=-1-f(x)$:

لدينا، $f(-x)=-\dfrac{4}{9}(-x)-1+\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\dfrac{4}{9}x-1+\dfrac{e^x}{e^x(1-e^{-x})}=-1+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$ — 0,25

$$-1-f(x)=-1-\left[-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}\right]=-1+\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{e^x-1}$$

منه، $f(-x)=-1-f(x)$ — 0,5

| | |
|---|---|
| **الاستنتاج:** لدينا ، $f(-x)=-1-f(x)$ اي $f(-x)+f(x)=-1$ منه النقطة $\Omega\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$. | |
| **6) أ) تبيان ان $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ مستقيمان مقاربان لـ $(C_f)$:** | |
| $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-e^x}\right]=0$ منه المستقيم $(\Delta_1)$ ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x-1$ بجوار $+\infty$. | 0,25 |
| $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{1-e^x}\right]=0$ منه المستقيم $(\Delta_2)$ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x$ بجوار $-\infty$ | |
| **ب) دراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$:** | |
| ندرس اشارة الفرق : $\begin{cases} f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)=\frac{1}{1-e^x} \\ f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)=\frac{e^x}{1-e^x} \end{cases}$ | 1 |
| $1-e^x\geq 0$ تكافئ $-e^x\geq -1$ تكافئ $e^x\leq 1$ اي $x\leq 0$ منه : | |
| $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$على المجال $]-\infty;0[$<br>$(C_f)$ يقع تحت $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$على المجال $]0;+\infty[$ | |
| **7) الرسم:** | 0,5 |
| | 0,25 |

| $x$ | $-\infty$    0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)-\left(-\frac{4}{9}x-1\right)$ | + | − |
| $f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)$ | + | − |

تربية أون لاين

-3 -2 -1 0 1 2 3

2 1 0 -1 -2 -3

$\Omega$

$(\Delta_1): y=-\frac{4}{9}x$

$(\Delta_2): y=-\frac{4}{9}x-1$

| | |
|---|---|
| **8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و اشارة حلول المعادلة** $\frac{e^x}{1-e^x}=m$ : | |
| لدينا ، $\frac{e^x}{1-e^x}=m$ تكافئ $-\frac{4}{9}x+\frac{e^x}{1-e^x}=-\frac{4}{9}x+m$ تكافئ $f(x)=-\frac{4}{9}x+m$ | 0,25 |
| منه حلول المعادلة يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{4}{9}x+m$ | |
| **المناقشة:** <br> $m<-1$ : المعادلة تقبل حل وحيد موجب <br> $-1\leq m\leq 0$ : المعادلة لا تقبل حلول <br> $m>0$ : المعادلة تقبل حل وحيد سالب . | 0,5 |
| **9) أ) حساب مساحة الحيز** $A(\lambda)$ : <br> $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-\ln 4}\left[f(x)-\left(-\frac{4}{9}x\right)\right]dx=\int_{\lambda}^{-\ln 4}\frac{e^x}{1-e^x}dx=\left[-\ln(1-e^x)\right]_{\lambda}^{-\ln 4}$ <br> $=\left(-\ln(1-e^{-\ln 4})\right)-\left(-\ln(1-e^{\lambda})\right)$ <br> $=-\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ln(1-e^{\lambda})$ <br> $=\ln\left(\frac{4(1-e^{\lambda})}{3}\right)u.a$ | 0,5 |
| حساب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$ : $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\ln\left(\frac{4(1-e^{\lambda})}{3}\right)=\frac{4}{3}$ <br><br> Abdelmalek <br> 00000 0000000000000000--- | |
| **بالتوفيق في البكالوريا إن شاء الله** | |

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

ثانوية الحسن ابن الهيثم

**الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة جوان 2012** الشعب : **رياضيات**

اختبار في مادة : **الرياضيات** المد : **04 ساعات ونصف**

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول : (20 نقط )

### التمرين الأول:( 4 نقاط)

عين في كل حالة من الحالات الثلاثة الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الأربعة مع التعليل

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ و التي تحقق $Z = 1 - 2i + e^{i\theta}$ حيث $\theta$ عدد حقيقي

**أ.** $(E)$ مستقيم يشمل النقطة ذات اللاحقة $2 - 2i$ **ب.** $(E)$ دائرة لاحقة مركزها $-1 + 2i$ ونصف قطرها 1

**ج.** $(E)$ دائرة لاحقة مركزها $1 - 2i$ ونصف قطرها 1 **د.** $(E)$ دائرة لاحقة مركزها $1 - 2i$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$

2. لتكن $(F)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ و التي تحقق $|Z - 1 + i| = |Z + 1 + 2i|$

نعتبر النقط $A$ , $B$ و $C$ ذات اللواحق $1 - i$ , $-1 + 2i$ و $-1 - 2i$ على الترتيب

**أ.** $C$ نقطة من $(F)$ **ب.** $(F)$ محور القطعة $[AB]$

**ج.** $(F)$ محور القطعة $[AC]$ **د.** $(F)$ دائرة قطرها $[AB]$

3. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $|Z|^2 + Z = 7 + i$

المعادلة تقبل : **أ.** حلان متمايزان جزءهما التخيلي 1 **ب.** حل حقيقي

**ج.** حلان متمايزان أحدهما فقط جزءه التخيلي 1 **د.** حل جزءه التخيلي 2

### التمرين الثاني: ( 4 نقاط)

1. أ.ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 9

ب. بين أن $(1433)^{2012} \equiv 4[9]$

2. أ.اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ $(10)^n \equiv 1[9]$

ب. نرمزبـ $N$ إلى عدد طبيعي مكتوب في النظام ذو الأساس عشرة ونسمي $S$ مجموع أرقامه اثبت أن $N \equiv S[9]$

3. نضع $A = (1433)^{2012}$ ونرمز بـ: $B$ مجموع أرقام $A$ و $C$ مجموع أرقام $B$ و $D$ مجموع أرقام $C$

أ. اثبت أن $A \equiv D(9)$

ب. علما أن $1433 \prec 10000$ بين أن $A$ بكتب على الأكثر ب 8048 رقم ثم استنتج أن $B \leq 72432$

ت. بين أن $C \leq 45$

ث. باستعمال قائمة الأعداد الأقل من 45 عين اكبر قيمة لـ $D$ ثم بين أن $D = 4$

**التمرين الثالث: ( 5 نقاط)**

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

النقطة $A(1,-1,3)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته : $x-y+3z=0$

1. أ-عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(OA)$
ب-اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$العمودي على المستقيم $(OA)$في النقطة $A$
ج- تحقق من أن $(P)$ يوازي المستوي $(Q)$

2. نعتبر سطح الكرة $(S)$ المماسة للمستوي $(Q)$ في $A$ والتي يقطعها المستوي $(P)$ وفق الدائرة $(C)$ التي مركزها $O$ ونصف قطرها $\sqrt{33}$

أ. بين أن $\omega(a,b,c)$ مركز سطح الكرة $(S)$ ينتمي الى المستقيم $(OA)$ ثم استنتج ان $b=-a$ و $c=3a$
ب. بين أن : $\omega A^2-\omega O^2=33$ ثم استنتج ان $a-b+3c=-11$
ت. استنتج احداثيات $\omega$ مركز سطح الكرة $(S)$ ثم احسب نصف قطرها

**التمرين الرابع: ( 7 نقاط)**

الهدف من هذا التمرين هوإثبات أن المعادلة$(E):e^{x}=\frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا في $R$و إنشاء متتالية متقاربة نحو هذا الحل .

**الجزء الأول :** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $R$ بـ: $f(x)=x-e^{-x}$

1. بين أن $x$حل للمعادلة$(E)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)=0$
2. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$
أ. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $R$
ب. استنتج أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $R$ نرمز له بالرمز $\alpha$.
ت. بين أن $\alpha$ينتمي إلى المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$
ث. ادرس إشارة الدالة $f$ على المجال$[0,\alpha]$

**الجزء الثاني:** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على$[0,1]$ بـ: $g(x)=\frac{1+x}{1+e^{x}}$

1. بين أن المعادلتين $f(x)=0$ و $g(x)=x$ متكافئتان
2. استنتج أن $\alpha$ العدد الحقيقي الوحيد الذي يحقق $g(\alpha)=\alpha$
3. احسب $g'(x)$ واستنتج أن الدالة $g$ متزايدة على المجال $[0,\alpha[$

**الجزء الثالث:** نعتبر المتتالية $(u_n)$المعرفة بـ: $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ $u_{n+1}=g(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le u_n\le\alpha$ و $u_n\le u_{n+1}$
2. استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة .
3. نرمز بـ $l$ إلى نهاية المتتالية $(u_n)$ . برر أن $g(l)=l$ ثم استنتج قيمة $l$ .
4. باستعمال الآلة الحاسبة أعط قيمة تقريبية لـ $u_4$ إلى $10^{-6}$

## الموضوع الثاني : (20 نقطة)

### التمرين الأول:( 5 نقاط)

**الجزء الأول** نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $(I)$ .......$z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. بيّن أن 2 حلا للمعادلة $(I)$ وأنه يمكن كتابة $(I)$ على الشكل $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2. استنتج حلول المعادلة $(I)$ ثم اكتب الحلول على الشكل الآسي .

**الجزء الثاني** المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. علّم النقط $A$ ، $B$ و $D$ ذات اللواحق، $z_A = -2-2i$ و $z_B = 2$ و $z_D = -2+2i$ على الترتيب.
2. احسب اللاحقة $z_M$ للنقطة $M$ حيث $ABMD$ متوازي أضلاع. علّم النقطة $M$.
3. $E$ هي صورة $M$ بالدوران الذي مركزه $B$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ؛ $F$ هي صورة $M$ بالدوران الذي مركزه $D$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
   - ✓ احسب اللاحقة $z_E$ للنقطة $E$ و اللاحقة $z_F$ للنقطة $F$.ثم علّم $E$ و $F$.
4. اكتب $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}$ على الشكل المثلثي و استنتج طبيعة المثلث $AEF$.
5. $I$ هي منتصف $[EF]$. عيّن صورة المثلث $EBA$ بالدوران الذي مركزه $I$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$.

### التمرين الثاني: ( 5 نقاط)

1. نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(3,2,6)$ ، $B(1,2,4)$ و $C(4,-2,5)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته : $2x + y - 2z + 4 = 0$
   - أ. بين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا.
   - ب. بين أن المستوي $(ABC)$ هو المستوي $(P)$
   - ت. اثبت أن المثلث $ABC$ قائم.
   - ث. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $O$ ويعامد $(P)$
   - ج. احسب المسافة بين النقطة $O$ والمستوي $(P)$
   - ح. احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$
2. يرمز $I$ الى مركز ثقل المثلث ABC . و $G$ إلى مرجح الجملة $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$
   - ✓ بين أن النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيم $(OI)$
   - ✓ احسب المسافة بين النقطة $G$ والمستوي $(P)$
3. لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق : $\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
   - ✓ عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $(\Gamma)$ ثم عين تقاطع $(\Gamma)$ مع المستوي $(P)$

**التمرين الثالث: ( 4 نقاط)**

$a$ و $b$ عددان طبيعيان غير معدومين حيث $PGCD(a+b;ab)=p$ مع $p$ عدد اولي

1. بين ان $p$ يقسم $a^2$ .
   - ✓ استنتج ان $p$ يقسم $a$ وان $p$ يقسم $b$
2. بين ان $PGCD(a;b)=p$
3. $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث $a \leq b$

أ. حل الجملة: $\begin{cases} PGCD(a;b)=5 \\ PPCM(a;b)=170 \end{cases}$

ب. استنتج حلول الجملة : $\begin{cases} PGCD(a+b;ab)=5 \\ PPCM(a;b)=170 \end{cases}$

**التمرين الرابع: ( 6 نقاط)**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{ln(x+3)}{x+3}$

1. أ.بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم ادرس إشارة $f'$

ب. احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$

ج. شكل جدول تغيرات الدالة $f$

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها العام $u_n=\int_n^{n+1} f(t)dt$

أ. بين انه إذا كان $n \leq x \leq n+1$ فان $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

ب. بين دون حساب $u_n$ انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

ت. استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة يطلب تعين نهايتها

3. نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $I_n=\int_0^n f(x)dx$

أ. احسب $I_n$

4. نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

أ. احسب $S_n$ . هل المتتالية $(S_n)$ متقاربة ؟

# تصـــحيـــح البكــــالوريا التجريبي 2012

## الموضوع الأول

### التمرين الاول:

**1. الاقتراح الصحيح هو ج**

لان مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ و التي تحقق $Z = Z_0 + re^{i\theta}$ حيث $\theta$ عدد حقيقي هي دائرة لاحقة مركزها $I_0$ ونصف قطرها $r$

في هذه الحالة $Z_0 = 1 - 2i$ ونصف قطرها $r = 1$

**2. الاقتراح الصحيح هو ج**

لان $M \in (F)$ تكافئ $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$

تكافئ $|z - z_A| = |z - z_C|$

تكافئ $AM = CM$

3. **الاقتراح الصحيح هو أ** نضع $z = x + iy$

$z + |z|^2 = 7 + i$ تكافئ $x^2 + y^2 + x + iy = 7 + i$

تكافئ $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

تكافئ $Z = 2 + i$ او $Z = -3 + i$

### التمرين الثاني

**1. ادرسة حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 9**

اذاكان $n \equiv 0[6]$ فان $2^n \equiv 1[9]$ اذاكان $n \equiv 1[6]$ فان $2^n \equiv 2[9]$

اذاكان $n \equiv 2[6]$ فان $2^n \equiv 4[9]$ اذاكان $n \equiv 3[6]$ فان $2^n \equiv 8[9]$

اذاكان $n \equiv 4[6]$ فان $2^n \equiv 7[9]$ اذاكان $n \equiv 5[6]$ فان $2^n \equiv 5[9]$

**ب. تبيان أن $(1433)^{2012} \equiv 4[9]$**

$1433 \equiv 2[9]$ و منه $1433^{2012} \equiv 2^{2012}[9]$

و $2012 \equiv 2[6]$ اذن $1433^{2012} \equiv 4[9]$

**2. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ $(10)^n \equiv 1[9]$**

$10 \equiv 1[9]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ $(10)^n \equiv 1[9]$

**ب. اثبات أن $N \equiv S[9]$**

نضع $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ في الاساس 10

اذن $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$

و. $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

من السؤال 2 أ $a_p \times 10^p \equiv a_p \ (9)$

اذن $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \ (9)$ وبالتالي $N \equiv S[9]$

**3 . أ. نضع** $A = (1433)^{2012}$ **اثبات أن** $A \equiv D(9)$

$A \equiv B[9]$ و $B \equiv C[9]$ و $C \equiv D[9]$ بالتعدي $A \equiv D(9)$

**ب. تبيان أن $A$ يكتب على الأكثر ب 8048 رقم**

$1433 \prec 10000$ ومنه $1433 \prec 10^4$

ومنه $1433^{2012} \prec 10^{(4 \times 2012)}$

ومنه $1433^{2012} \prec 10^{8048}$

اذن $A$ يكتب في الاساس على الأكثر بـ 8048 رقما

اكبر عدد يكتب بـ 8048 رقم هو $\underbrace{999 \cdots 99}$ 8048 مرة

مجموع هذه الارقام $8048 \times 9 = 72432$

**ج. استنتج أن $B \leq 72432$**

نعلم ان $B$ هو مجموع أرقام $A$ وبالتالي $B \leq 72432$

**د. تبيان أن $C \leq 45$**

بنفس الطريقة $72432 \leq 99999$ و $C$ مجموع أرقام $B$

اذن $c \leq 5 \times 9 = 45$

**ه. تعين اكبر قيمة لـ $D$ ثم تبيان أن $D = 4$**

في قائمة الاعداد الاقل من 45 نلاحظ ان 39 يعطي اكبر مجموع هو 12 اذن $D \leq 12$

لدينا $A \equiv 4[9]$ و $A \equiv D(9)$ اذن $D \equiv 4[9]$ ولدينا $D \leq 12$

وبالتالي $D = 4$

## التمرين الثالث:

1. أ ـتعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(OA)$

$M\in(OA)$ معناه $\begin{cases} x=k \\ y=-k \\ z=3k \end{cases}$ $k\epsilon\mathbb{R}$

ب -اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$

$M\in(Q)$ معناه $x-y+3z-11=0$

ج- تحقق من أن $(p)$ يوازي المستوي $(Q)$

الشعاعان الناظميان لـ$(p)$ و$(Q)$ متساويان اذن $(p)$يوازي$(Q)$

2. أ- تـبيان أن $\omega$ مركزسطح الكرة $(S)$ ينتمي الى $(OA)$

لدينا $\begin{cases} (OA) \text{ عمودي على}(Q) \\ (Q) \text{ عمودي على}(S)\text{في}A \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (OA) \text{ عمودي على}(Q) \\ (Q) \text{ عمودي على}(\omega A) \end{cases}$

ومنه $\omega\in(OA)$

- الاستنتاج ان $b=-a$ و $c=3a$

$\omega\in(OA)$ معناه $c=3k$ و $b=-k$ و $a=k$

ومنه $b=-a$ و $c=3a$

ب- بين أن: $\omega A^2-\omega O^2=33$ $r$ نصف قطر $(S)$

$r^2=33+\omega O^2$ ومنه $r^2-\omega O^2=33$.

$r=\omega A$. ومنه $\omega A^2-\omega O^2=33$

- استنتاج ان $a-b+3c=-11$

$\begin{cases} \omega A^2=(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \\ \omega O^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$.

بالطرح ينتج $\omega A^2-\omega O^2=-2a+2b-6c+11$

اذن$33=-2a+2b-6c+11$

ومنه$a-b+3c=-11$

ت -استنتج احداثيات $\omega$ مركز سطح الكرة $(S)$ ثم احسب نصف قطرها

لدينا $\begin{cases} a-b+3c=-11 \\ b=-a \\ c=3a \end{cases}$ ومنه $\omega(-1,1,-3)$

حساب $r$. $r=\omega A=\sqrt{44}$.

## التمرين الرابع :

**الجزء الأول :** الدالة $f$ المعرفة على $R$ بـ: $f(x)=x-e^{-x}$

1. تبيان أن $x$ حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)=0$

$x$ حل للمعادلة $(E)$ معناه $e^x=\frac{1}{x}$ مع $x\neq 0$

معناه $\frac{1}{e^x}=x$ معناه $x-e^{-x}=0$ معناه $f(x)=0$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$

أ .المشتقة من اجل كل $x$ من $R$: $f'(x)=1+e^{-x}$

من اجل كل $x$ من $R$: $f'(x)>0$

ب .استنتج أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $R$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $R$ ومن اجل كل $k$ من $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=\mathbb{R}$

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد في $R$

اذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد في $R$ هو $\alpha$

ت .تبيان أن $\alpha$ ينتمي إلى المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-e^{-1/2}=-0,1\ldots<0$

و $f(1)=1-e^{-1}=0,6\ldots>0$ و $f(\alpha)=0$

اذن $f\left(\frac{1}{2}\right)\leq f(\alpha)\leq f(1)$

وبما أن $f$ متزايدة على $R$ فان $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$

ث .دراسة إشارة الدالة $f$ على المجال $[0,\alpha]$

$x\in[0;\alpha]$ و $f$ متزايدة على $R$

اذن $f(x)\leq f(\alpha)$ اي $f(x)\leq 0$

**الجزء الثاني:**

الدالة $g$ المعرفة على $[0,1]$ بـ: $g(x)=\dfrac{1+x}{1+e^x}$

**1. بين أن المعادلتين $f(x)=0$ و $g(x)=x$ متكافئتان**

. $g(x)=x$ تكافئ $1+x=x(1+e^x)$

تكافئ $xe^x=1$ تكافئ $x=e^{-x}$ تكافئ $f(x)=0$

**2. استنتج أن $\alpha$ العدد الحقيقي الوحيد الذي يحقق $g(\alpha)=\alpha$**

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في $R$ اذن المعادلة

$g(x)=x$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في $R$ (لانهما متكافئتان)

**3. حساب $g'(x)$ واستنتاج أن $g$ متزايدة على المجال $[0,\alpha]$**

- من اجل كل $x$ من $R$:

$$g'(x)=\frac{1(1+e^x)-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

- اشارة $g'(x)$ من اشارة $1-xe^x$

لدينا من اجل كل $x$ من $[0,\alpha]$: $f(x)\le 0$

ومنه $x-e^{-x}\le 0$ ومنه $x\le e^{-x}$ ومنه $xe^x\le 1$

ومنه $1-xe^x\ge 0$ ومنه $g'(x)\ge 0$

اذن الدالة $g$ متزايدة على المجال $[0,\alpha]$

**الجزء الثالث:**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ: $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ $u_{n+1}=g(u_n)$

**1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$:** $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha.$

- لدينا $u_0=0$ و $u_1=\dfrac{1+0}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$ و $\alpha\ge\dfrac{1}{2}$ ،

اذن $0\le u_0\le u_1\le\alpha$

-نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha.$

ومنه $g(0)\le g(u_n)\le g(u_{n+1})\le g(\alpha)$

ومنه $\dfrac{1}{2}\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha$

ومنه $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha$

من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha.$

**2. استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة**

$(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الاعلى بـ $\alpha$ ينتج ان $(u_n)$ متقاربة

**3. تبرير أن $g(l)=l$ ثم استنتاج قيمة $\ell$**

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}g(u_n)=g(\ell).$$

لأن g مستمرة

$\ell$ هو حل للمعادلة $g(x)=x$ اذن $\ell=\alpha$

المتتالية $(u_n)$ متقاربة نحو $\alpha$

**4. أعط قيمة تقريبية لـ $u_4$ إلى $10^{-6}$**

$u_2=0,5663110032\ldots,\ u_3=0,567143165\ldots$

$u_4=0,567143$ مدور الى $10^{-6}$

---

## الموضوع الثاني:

**التمرين الاول:**

**الجزء الاول1 . أ .تبيّن أن 2 حلا للمعادلة $(I)$**

$2^3+2(2)^2-16=0$ اذن 2 حل للمعادلة $(I)$

**ب .كتابة $(I)$ على الشكل $(z-2)(az^2+bz+c)=0$**

$$Z^3+2Z^2-16=(Z-2)(aZ^2+bZ+c)$$

بالمطابقة ينتج $c=8$ و $b=4$ و $a=1$

$(I)$ تكافئ $(Z-2)(Z^2+4Z+8=0)=0$

**2. استنتاج حلول المعادلة $(I)$**

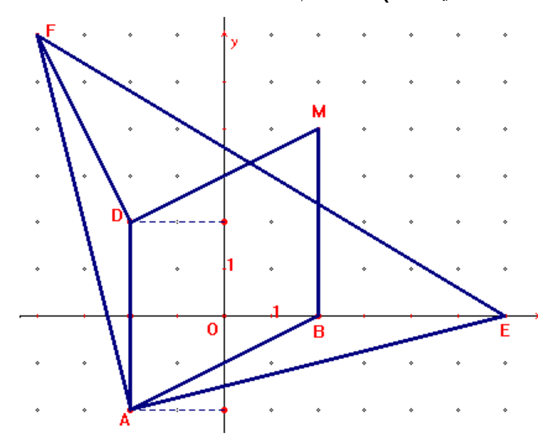
$(Z-2)(Z^2+4Z+8)=0$ تكافئ $Z=2$ او $Z^2+4Z+8=0$

حلول المعادلة هي $-2-2i$ و $-2+2i$ و $2$

**كتابة الحلول على الشكل الآسي**

$-2-2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ و $-2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و $2=2e^{i0}$

**الجزء الثاني :: 1) . تعليم النقط** $A$، $B$ و $D$




**2) حساب لاحقة $z_M$ للنقطة $M$**

$ABMD$ متوازي أضلاع يكافئ $\vec{AB}=\vec{DM}$

أي $z_M - z_D = z_B - z_A$

أي $z_M = (-2+2i)+2-(-2-2i)$

إذن $z_M = 2+4i$.

**3) حساب لاحقة $z_E$ للنقطة $E$ ولاحقة $z_F$ للنقطة $F$.**

- $E$ هي صورة $M$ بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{-\pi}{2}$ إذن $Z_E - Z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_M - Z_B)$ أي $z_E = 2 - i(2+4i-2)$ أي $z_E = 6$.
- $F$ هي صورة $M$ بالدوران الذي مركزه $D$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن $Z_F - Z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_M - Z_D)$ أي $z_F = -2+2i+i(2+4i+2-2i)$ أي $z_F = -4+6i$.

**تعليّم النقط $M$ و $E$ و $F$. انظر الشكل السابق**

**4) كتابة $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}$ على الشكل الجبري**

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}=\frac{-4+6i+2+2i}{6+2+2i}=\frac{-2+8i}{8+2i}=\frac{i(8+2i)}{8+2i}=i$$

**- استنتاج طبيعة المثلث $AEF$.**

$z_F - z_A = i(z_E - z_A)$ أي $Z_F - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_E - Z_A)$

و هذا يبيّن أن $F$ هي صورة $E$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$،

نستنتج أن المثلث $AEF$ قائم في $A$ و متقايس الساقين.

**5) تعيّن صورة $EBA$ بالدوران الذي مركزه $I$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$.**

المثلث $AEF$ قائم في $A$ و متقايس الساقين ، إذن

$IF = IE = IA$ و $(\vec{IA},\vec{IF})\equiv(\vec{IE},\vec{IA})\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$

نسمي r الدوران الذي مركزه $I$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$، لدينا

$r(A)=F$ و $r(E)=A$ .

لاحقة $I$ هي $z_I=\frac{1}{2}(z_E+z_F)$ أي $z_I = 1+3i$ .

صورة النقطة $B$ بالدوران $r$ هي النقطة $B'$ التي لاحقتها

$z_{B'}$ حيث $Z_{B'} - Z_I = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_I)$

أي $z_{B'} = -2+3i$. إذن $r(B)=D$ .

صورة المثلث $EBA$ بالدوران $r$ هي المثلث $ADF$ .

__التمرين الثاني:__

**أ .تبيان أن النقط ، $B$ ، $C$ تعين مستويا**

الشعاعان $\vec{AB}(-2,0,-2)$ و $\vec{AC}(1,-4,-1)$

غير مرتبطان خطيا اذن النقط ليست على استقامية

**ب .تبيان أن المستوي $(ABC)$ هو المستوي $(P)$**

$$2x_A+y_A-2z_A+4=6+2-12+4=0$$

$$2x_B+y_B-2z_B+4=2+2-8+4=0$$

$$2x_C+y_C-2z_C+4=8-2-10+4=0$$

احداثيات النقط $A$، $B$، $C$ تحقق معادلة $(P)$

اذن المستوي $(ABC)$ هو المستوي $(P)$

**ت . اثبات أن المثلث $ABC$ قائم**

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ اذن المثلث $ABC$ قائم في $A$

**ث . كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ يشمل $O$**

وشعاع توجيه له $\vec{n}(2,1,-2)$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

**ج . حساب المسافة بين النقطة $O$ والمستوي $(P)$**

$$d(o,(p))=\frac{|2x_o+y_o-2z_o+4|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{3}$$

ح . حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$

حساب $\mathscr{A}$ مساحة المثلث $ABC$ قائم في $A$

مساحة المثلث $ABC$ هي $\mathscr{A} = \frac{AB \times AC}{2}$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\mathscr{A} = \frac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2} = 6.$$

حجم رباعي الوجوه $OABC$

$$\mathscr{V} = \frac{\mathscr{A}\times h}{3} = \frac{6\times\frac{4}{3}}{3} = \frac{8}{3}.$$

**2 ا .تبيان أن النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيم $(OI)$**

بمان $3+1+1+1=6\neq 0$ $G$ موجودة

$G$ مرجح $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$

معناه $G$ مرجح $\{(O;3),(I;3)\}$

معناه $G$ منتصف $[OI]$ أي $G\in(OI)$

**ب . حساب المسافة $d$ بين النقطة $G$ والمستوي $(P)$**

احداثيات $G$ هي $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{2}\right)$

$$d = \frac{\left|2\times\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-2\times\frac{5}{2}+4\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

**3 تعيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $(\Gamma)$**

$M$ نقطة من الفضاء نعلم ان

$$3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (3+1+1+1)\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG},$$

$M\in\Gamma$ تكافئ $\|6\overrightarrow{MG}\| = 6$ تكافئ $MG=1$

$(\Gamma)$.سطح كرة مركزها $G$ ونصف قطرها 1

عين تقاطع $(\Gamma)$ مع المستوي $(P)$

المسافة بين $G$ مركز $(\Gamma)$ و $(P)$ هي $d$ ونصف قطر $(\Gamma)$ هو $R=1$

بمان $d \prec R$ فان تقاطع $(\Gamma)$ مع المستوي $(P)$ هي دائرة

**<u>التمرين الثالث:</u>**

**1 .تبيان ان $p$ يقسم $a^2$**

لدينا $\begin{cases} p \text{ يقسم } ab \\ p \text{ يقسم } a+b \end{cases}$ .ومنه $\begin{cases} p \text{ يقسم } ab \\ p \text{ يقسم } a(a+b) \end{cases}$

ومنه $p$ يقسم $(a(a+b)-ab)$ ومنه $p$ يقسم $a^2$

**-استنتاج ان $p$ يقسم $a$ وان $p$ يقسم $b$**

لدينا $\begin{cases} p \text{ يقسم } a a \\ p \text{ اولي} \end{cases}$ ومنه $p$ يقسم $a$

لدينا $\begin{cases} p \text{ يقسم } a \\ p \text{ يقسم } a+b \end{cases}$ ومنه $p$ يقسم $((a+b)-a)$

ومنه $p$ يقسم $b$

**2.تبيان ان $PGD(a;b) = p$**

لدينا $\begin{cases} p \text{ يقسم } a \\ p \text{ يقسم } b \end{cases}$ ومنه $p$ يقسم $PGCD(a;b)$ .....1

و $\begin{cases} PGCD(a;b) \text{ يقسم } ab \\ PGCD(a;b) \text{ يقسم } a+b \end{cases}$ ومنه $PGCD(a;b)$ يقسم $p$ ... 2

اذن من 1 و 2 ينتج ان $PGCD(a;b) = p$

**3 أ. حل الجملة:** $\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(a;b) = 5} \\ \boldsymbol{PPCM(a;b) = 170} \end{cases}$ حيث $a \le b$

$\begin{cases} PGCD(a;b) = 5 \\ ab = 170\times 5 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 5\times a' \\ b = 5\times b' \\ a'b' = 34 \end{cases}$ و

ومنه $(a'=1, b'=34)$ او $(a'=2, b'=17)$

اذن $(a=5, b=170)$ او $(a=10, b=85)$

**ب .استنتاج حلول الجملة :** $\begin{cases} \boldsymbol{PGCD(a+b;ab) = 5} \\ \boldsymbol{PPCM(a;b) = 170} \end{cases}$

$\begin{cases} PGCD(a+b;ab) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$ .معناه $\begin{cases} PGC(a;b) = 5 \\ PPCM(a;b) = 170 \end{cases}$

ومنه $(a=5, b=170)$ او $(a=10, b=85)$

**<u>التمرين الرابع :</u>**

**1. أ.تبيان أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$**

الدالتان $x\mapsto ln(x+3)$ و $x\mapsto x+3$ قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$ نستنتج ان $f$ قابلة للاشتقاق عل $]0;+\infty[$ لانها حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x+3$ لا تنعدم على $]0;+\infty[$

دراسة إشارة $f'$

**حساب المشتقة من اجل كل $x$ من $]0;+\infty[$**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3}\times(x+3) - \ln(x+3)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

**اشارة $f'(x)$ من اشارة** $1-\ln(x+3)$

$1-\ln(x+3) \prec 0$ تكافئ $x \succ e-3$

$f'$ سالبة تماما على $]0;+\infty[$.

**ب . حساب نهاية الدالة $f$ عند** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$$

**ت. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\frac{\ln 3}{3}$ ↘ $0$ |



**2.أ. تبيان انه إذا كان $n\le x\le n+1$** فان
$f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

لدينا $n\le x\le n+1$ ومنه $f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

لان الدالة $f$ متناقصة على المجال $]0;+\infty[$

**ب تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ,** $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

من اجل كل $x$ من $[n,n+1]$ : $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

ومنه $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} f(n)dx$

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx = (n+1-n)\times f(n) = f(n)$$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = (n+1-n)\times f(n+1) = f(n+1)$$

أثبتنا انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ ، $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

**ت .استنتاج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة يطلب تعين نهايتها**

نعلم ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

اذن $\lim_{n\to+\infty} f(n)=0$ و $\lim_{n\to+\infty} f(n+1)=0$

وبالتالي $(u_n)$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

**3.أ . حساب $I_n$ حيث** $I_n=\int_0^n f(x)dx$

الدالة $f$ من الشكل $u'u$ مع $u(x)=\ln(x+3)$

و $u'(x)=\frac{1}{x+3}$ ينتج $I_n=\frac{1}{2}\left[(\ln(x+3))^2\right]_0^n$

$$I_n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+3)-\ln^2 3\right)$$

3 . حساب $S_n$ .

$$S_n = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$$

$$= \int_0^n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

- .- المتتالية $(S_n)$ متباعدة لان
$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

تم بفضل الله هذا التصحيح بتاريخ 12/05/ 2012 من طرف

الأستاذ : الميلود بالرياح أستاذ بثانوية الحسن بن الهيثم بالبيض

متمنيا لجميع التلاميذ أن يجدوا فيه ما يفيدهم ومتمنيا لهم النجاح في البكالوريا والتوفيق في مسارهم المهني ,